1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°10 : Généralités sur les fonctions

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{7x-3}{2x^2-3x+\dfrac{9}{8}}$ 2) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$ 3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2-4x+6}}{2x-1}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{7x-3}{2x^2-3x+\dfrac{9}{8}}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+\frac{9}{8}\neq 0\right\}$$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$: a = 2, b = -3 et c = $\dfrac{9}{8}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \dfrac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-3}{2\times 2}=\dfrac{3}{4}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

Donc : $D_f=]-\infty;-4]\cup]-1;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+2|x|-3\neq 0\}$

$x^2+2|x|-3=0\Leftrightarrow|x|^2+2|x|-3=0$ On pose $|x|=X$ donc l'équation devient : $X^2+2X-3=0$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et ses solutions sont :

$X_1=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=1$

Donc on a : $|x|=-3$ et $|x|=1$

$|x|=-3$ n'a pas de solution et $|x|=1\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{x+1}{x}\geq 0 \ \ et \ \ x\neq 0\right\}$

Dressons un tableau de signe de : $\dfrac{x+1}{x}$

$x+1=0$ Signifie que : $x=-1$

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

D'où : $D_f = \left]-\infty;-1\right] \cup \left]0;+\infty\right[$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-4x+6}}{2x-1}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2x^2-4x+6 \geq 0 \;\; et \;\; 2x-1 \neq 0 \right\}$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -4 et c = 6 donc : $\Delta = b^2-4ac = 16-48 = -32 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2-4x+6$	$+$	

Par suite : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \; 2x-1 \neq 0 \right\}$

Donc : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{1}{2} \right\}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice2 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x) = 3x^2-5$. 2) $f(x) = \tan x - 2\sin x$ 3) $f(x) = 2x^3+x^2$

Solution : 1) $f(x) = 3x^2-5$; $D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}$, alors : $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2-5 = 3x^2-5$
  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire.

2) $f(x) = \tan x - 2\sin x$: $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

- $x \in D_f \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x \neq -\frac{\pi}{2} - k\pi; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x \neq -\frac{\pi}{2} - k\pi + \pi; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi; k' \in \mathbb{Z}$

Alors : $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

- $f(-x) = \tan(-x) - 2\sin(-x) = -\tan x + 2\sin x = -(\tan x - 2\sin x)$
  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

3) $f(x) = 2x^3+x^2$; f est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 = -2+1 = -1$ et $f(1) = 2 \times 1^3 + 1^2 = 2+1 = 3$

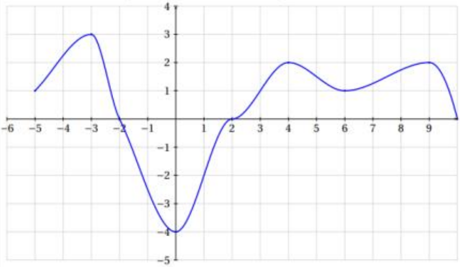
On a : $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\exists x=1\in\mathbb{R}\ /\ f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

f est une fonction ni paire ni impaire,

Exercice3 : À partir de la courbe représentative de la fonction f dresser son tableau de variations



Solution : On obtient le tableau de variations suivant :

x	-5	-3	0	4	6	9	10
$f(x)$		3		2		2	
	1		-4		1		0

Exercice4 : On considère une fonction f définie sur l'intervalle [−4;5] dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-4	-1	3	5
f	6		1	
		0		-2

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

Affirmation 1 : $f(4)\geq 0$

Affirmation 2 : La courbe représentant la fonction f coupe l'axe des abscisses en un seul point.

Solution : D'après le tableau de variation on sait que : $-2\leq f(4)\leq 1$

On ne peut donc pas déterminer le signe de $f(4)$

Affirmation 1 fausse

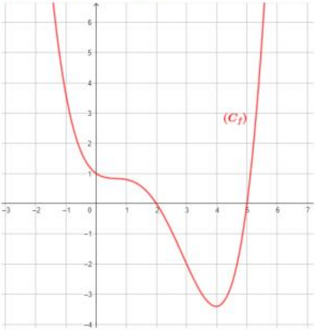
D'après le tableau de variation on sait que $f(-1)=0$. La courbe représentant la fonction f coupe donc l'axe des abscisses au point d'abscisses −1.

On sait également que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [3;5] et qu'elle prend des valeurs comprises entre −2 et 1. Elle prendra donc une nouvelle fois sur cet intervalle (il faudra attendre 2bac pour avoir une justification précise) la valeur 0.

Affirmation 2 fausse

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice5 : Soit si dessous : (C_f) La courbe représentative d'une fonction f



Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{f(x)}{x^2-x-2}<0$

Solution : Etudions le signe de : $\frac{f(x)}{x^2-x-2}$

$x^2-x-2=0 \quad \Delta=1+8=9$: $x_1=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2$ et $x_1=\frac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=2\ ou\,x=5$ et $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[2;5]$

Voici donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$f(x)$		+	|	+	0	−	0	+	
$x2-x-2$		+	0	−	0	+	|	+	
$Q(x)$		+	||	−	||	−	0	+	

Donc : $S=]-1;2[\cup]2;5[$

Exercice6 : Considérons la fonction f périodique de période 2 tel que : $f(x)=x-1 \quad \forall x\in[0;2[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;6[$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(9)$; $f(-8,5)$; $f(2025)$

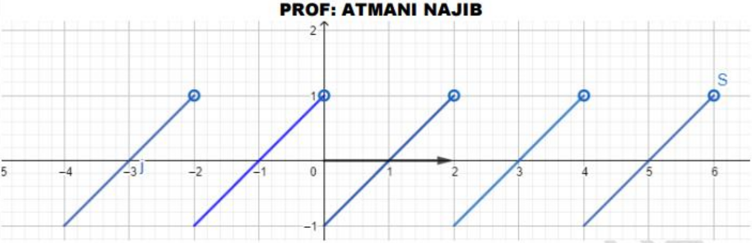
3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0=[0;2[$:

$f(x)=x-1 \quad \forall x\in[0;2[$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;6[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;2]$ et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

PROF ATMANI NAJIB



2) →Calculons : $f(9)$

$f(9)=f(8+1)=f(2\times4+1)=f(1)$ car f est une fonction périodique de période $T=2$

Et puisque : $1\in[0;2[$ alors : $f(9)=f(1)=1-1=0$

→Calculons : $f(-8,5)$

$f(-8,5)=f(-8-0,5)=f(-0,5)=f(-2\times1+1,5)=f(1,5)$ car f est une fonction périodique de période $T=2$ Et puisque : $1,5\in[0;2[$ alors : $f(-8,5)=f(1,5)=1,5-1=0,5$

→Calculons : $f(2025)$

$f(2025)=f(2\times1012+1)=f(1)$ car f est une fonction périodique de période $T=2$

Et puisque : $1\in[0;2[$ alors : $f(2025)=f(1)=1-1=0$

3) l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[2k;2(k+1)[\Leftrightarrow 2k\leq x\prec 2(k+1)$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\leq x-2k\prec 2\Leftrightarrow f(x-2k)=f(x)$

$x\in I_k\Leftrightarrow f(x)=x-2k-1\ ;\ k\leq\dfrac{x}{2}\prec k+1$

Car : $2k\leq x\prec 2(k+1)\Leftrightarrow k\leq\dfrac{x}{2}<k+1\Leftrightarrow E\left(\dfrac{x}{2}\right)=k$

Exercice7 : Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

1) Déterminer D_g.

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de g entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$.

3) Etudier les variations de g sur les intervalles $I=]-\infty;-1[$ et $J=]-1;+\infty[$.

4) Dresser son tableau de variation de f.

5) En déduire une comparaison des nombres : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Solution : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

1) On a $g(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à: $x+1\neq0$ c'est-à-dire : $x\neq-1$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

2) Soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tq $x_1 \neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2) = \dfrac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

3) a) Sur $I =]-\infty;-1[$

Soit $x_1 \in]-\infty;-1[$ et $x_2 \in]-\infty;-1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \prec -1$ et $x_2 \prec -1$ Donc $x_1 + 1 \prec 0$ et $x_2 + 1 \prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc : $T(x_1;x_2) = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$ sur $I =]-\infty;-1[$

D'où : g est strictement croissante sur $I =]-\infty;-1[$

b) Sur $J =]-1;+\infty[$

Soit $x_1 \in]-1;+\infty[$ et $x_2 \in]-1;+\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc : $x_1 \succ -1$ et $x_2 \succ -1$ Donc $x_1 + 1 \succ 0$ et $x_2 + 1 \succ 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc : $T(x_1;x_2) = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$ sur $J =]-1;+\infty[$

D'où : g est strictement croissante sur $J =]-1;+\infty[$

4) Résumé : tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

5) On a $-\sqrt{2} \in]-\infty;-1[$ et $-\sqrt{3} \in]-\infty;-1[$ et $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$

D'après le tableau de variation de g on a : g est strictement croissante sur $J =]-1;+\infty[$

Alors : $g(-\sqrt{3}) < g(-\sqrt{2})$

Donc : $\dfrac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1} < \dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+1}$ alors : $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} < \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

Exercice8 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 5x^2 + 3$

Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera

Solution : $D_f = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc $5x^2 \geq 0$ car $5 \succ 0$

Par suite $5x^2+3\geq 3$ et on a $f(0)=3$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq f(0)$

D'où : $f(0)=3$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice9 : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-4x^2+1$

Montrer que g admet un maximum absolu sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera

Solution : $D_g=\mathbb{R}$

On a pour tous : $x\in\mathbb{R}$; $x^2\geq 0$

Donc $-4x^2\leq 0$ car $-4\prec 0$

Par suite : $-4x^2+1\leq 1$ et on a $g(0)=1$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\leq g(0)$

D'où : $g(0)=1$ est un maximum absolu de g sur $\mathbb{R}$

Exercice10 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-2x^2+4x+1$

Montrer que 3 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x)\leq 3$ et que l'équation $f(x)=3$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$f(x)-3=-2x^2+4x+1-3=-2x^2+4x-2=-2(x^2-2x+1)=-2(x-1)^2\leq 0$

Donc $f(x)\leq 3$; $\forall x\in\mathbb{R}$ et on a : $f(x)=3\Leftrightarrow f(x)-3=0\Leftrightarrow -2(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$

Donc : L'équation $f(x)=3$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(1)=3$ donc : $f(x)\leq f(1)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(1)=3$ est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice11 : On considère les fonctions : $f:x\to f(x)=\frac{1}{2}x^2$ et $g:x\to g(x)=\frac{1}{x+1}$.

Le but de l'exercice est d'étudier la position relative de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) Montrer que, pour tout nombre x réel : $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$

3) Montrer que pour tout nombre x réel : $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ et en déduire le signe de l'expression : x^2+2x+2

4) A l'aide de ce qui précède, déterminer la position relative des courbes (C_f) et (C_g)

Solution : 1) Dans l'expression de $f(x)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle :

Donc $D_f=\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

Tandis que pour : $g(x)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+1=0$ soit $x=-1$

Donc, $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Pour tout x réel : $(x-1)(x^2+2x+2)=x^3+2x^2+2x-x^2-2x-2=x^3+x^2-2$ 3) Pour tout x réel :

$(x+1)^2+1=x^2+2x+1+1=x^2+2x+2$ $(x+1)^2\geq 0$ pour tout nombre x réel :

Donc $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq 1\succ 0$ ainsi x^2+2x+2 est toujours strictement positif.

4) Pour comparer les positions des courbes (C_f)

et (C_g), on étudie le signe de : $f(x)-g(x)$: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x+1}=\frac{x^3+x^2-2}{2(x+1)}=\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{2(x+1)}$

Donc, d'après de ce qui précède on a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+2x+2		$+$		$+$		$+$	
$2(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{2(x+1)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi (C_f) est au-dessus de (C_g) lorsque : $x\in]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$

Et (C_f) au-dessous de (C_g) lorsque : $x\in]-1;1]$ et les deux courbes se coupent en : $x=1$.

Exercice12 : Soient f et g les deux fonctions définies par :

$f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Dresser le Tableau de variations de f et de g

2) a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

4) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Solution : 1) a) $f(x)=-x^2-2x+3$: On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=3$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$ Donc $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$ et $(f(-1)=4)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(-1;4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

Donc le tableau de variations de f

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	↗	4	↘

1)b) $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$; on a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives :

$x=-2$ et $y=1$ et on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2+1=3\succ 0$

Donc le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

2)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3=0$ $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+11=16>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\dfrac{2+4}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3$ et $x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3;0)$ et $B(1;0)$

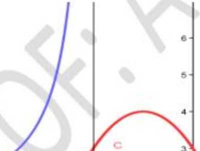
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

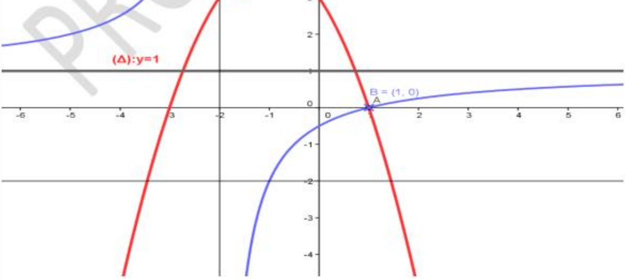
Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

3)Représentation graphique :

Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



PROF: ATMANI NAJIB



4) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$:

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

4)b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-2;1]$ Donc $S=]-2;1]$

Exercice13 : Soit les fonctions f et g tel que : $f(x)=x^2-2x+3$ et $g(x)=2x+1$

Déterminer : $g \circ f$ et $f \circ g$

Solution : On a : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$ donc $D_{g\circ f}=\mathbb{R}$ et $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2x+3)=2(x^2-2x+3)+1$

$(g\circ f)(x)=2x^2-4x+7$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=(2x+1)^2-2(2x+1)+3$

$(f\circ g)(x)=4x^2+4x+1-4x-2+3=4x^2+2$

Exercice14 : Exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

1) $h_1(x)=\dfrac{1}{3x-1}$ 2) $h_2(x)=\sqrt{x+3}$ 3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$

Solution : 1) $h_1(x)=\dfrac{1}{3x-1}$ on a : $h_1(x)=(g\circ f)(x)$ avec $f(x)=3x-1$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

2) $h_2(x)=\sqrt{x+3}$ on a : $h_2(x)=(g\circ f)(x)$ avec $f(x)=x+3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$ on a : $h_3(x)=(g\circ f)(x)$ avec $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=3x+4$

Exercice15 : Soient f et g et h les trois fonctions définies par :

$f(x)=\dfrac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$ et $g(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ et $h(x)=x^2+2$

1) a) Etudier les variations de g et de h

b) Etudier le signe de la fonction g

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

3) Etudier les variations de f dans les intervalles : $]1;+\infty[$; $\left[-\frac{3}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

Solution : 1) a) $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$; on a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ $\quad \Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5\prec 0$

(C_g) Est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$.

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g		↘	‖	↘	

1)a) On a h est une fonction polynôme donc $D_h=\mathbb{R}$

Donc le tableau de variations de h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h		↘	2	↗	

b) Etudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

2)Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

$$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$$

$$(h\circ g)(x)=\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2+2=\frac{4x^2+12x+9+2x^2-4x+2}{(x-1)^2}$$

$$(h\circ g)(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

3) Etude des variations de f dans les intervalles :

a) sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$: On a $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

PROF: ATMANI NAJIB

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]: g(x)\in[0;+\infty[$ et h est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

b) sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et $\forall x\in\left[-\frac{3}{2};1\right[: g(x)\in]-\infty;0]$ et h est décroissante sur $]-\infty;0]$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$

c) sur $]1;+\infty[$: Puisque g est décroissante sur $]1;+\infty[$ et $\forall x\in]1;+\infty[\, g(x)\in]0;+\infty[$ et h est croissante sur $]0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $]1;+\infty[$.

Donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-3/2$		1		$+\infty$
$f(x)$	↘	2	↗	‖	↘	

Exercice16 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x-2\sqrt{x-2}+1$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que : $f(x)\geq 2$; $\forall x\in[2;+\infty[$

3) Soit : $h(x)=\sqrt{x-2}$

a) Dresser le tableau de variation de h

b) Déterminer : $h([2;3])$; $h([3;+\infty[)$

4) a) Déterminer une fonction polynôme de degré 2 ; tel que : $f(x)=g\circ h(x)$; $\forall x\in[2;+\infty[$

b) En déduire les variations de f

c) Déterminer le tableau de variation de $\frac{1}{f}$

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-2\geq 0\}=[2;+\infty[$

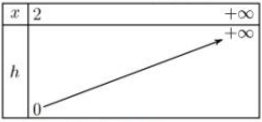
2) $f(x)\geq 2\Leftrightarrow x-2\sqrt{x-2}+1\geq 2\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-2}\geq 0\Leftrightarrow x-1\geq 2\sqrt{x-2}\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 4\left(\sqrt{x-2}\right)^2$ car $x\in[2;+\infty[$ donc : $x\in[1;+\infty[$ et donc : $x-1\geq 0$

$f(x)\geq 2\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 4(x-2)\Leftrightarrow x^2-6x+9\geq 0\Leftrightarrow (x-3)^2\geq 0$ (Vraie)

Donc : par équivalence on a : $f(x)\geq 2$; $\forall x\in[2;+\infty[$

3) Soit : $h(x)=\sqrt{x-2}$

a) le tableau de variation de h :



b) Déterminons : $h([2;3])$; $h([3;+\infty[)$

$h([2;3])=[0;1]$ et $h([3;+\infty[)=[1;+\infty[$

4) a) Déterminons une fonction polynôme de degré 2 ; tel que : $f(x)=g\circ h(x)$; $\forall x\in[2;+\infty[$

$f(x)=x-2\sqrt{x-2}+1=x-2-2\sqrt{x-2}+3=\left(\sqrt{x-2}\right)^2-2\sqrt{x-2}+3=\left(h(x)\right)^2-2h(x)+3$

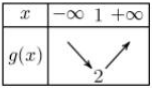
On pose : $g(x)=x^2-2x+3$

Donc : $f(x)=g(h(x))$

Donc : $f(x)=g\circ h(x)$; $\forall x\in[2;+\infty[$ avec : $g(x)=x^2-2x+3$

b) Déduction des variations de $f=g\circ h$:

On a : $g(x)=x^2-2x+3$ le tableau de variation de g est:



- Puisque h est décroissante sur $[2;3]$ et $h([2;3])=[0;1]$ et g est décroissante sur $[0;1]$ alors $f=g\circ h$ est décroissante sur $[2;3]$
- Puisque h est croissante sur $[3;+\infty[$ et $h([3;+\infty[)=[1;+\infty[$ et g est croissante sur $[1;+\infty[$ alors $f=g\circ h$ est croissante sur $[3;+\infty[$

c) Déterminons le tableau de variation de $\frac{1}{f}$:

- $\forall a\in[2;3]$ et $\forall b\in[2;3]$

$a\le b\Rightarrow f(a)\ge f(b)\ge 2\Rightarrow \frac{1}{f(a)}\le\frac{1}{f(b)}$

Alors $\frac{1}{f}$ est croissante sur $[2;3]$

- $\forall a\in[3;+\infty[$ et $\forall b\in[3;+\infty[$

$a\le b\Rightarrow f(a)\le f(b)\Rightarrow \frac{1}{f(a)}\ge\frac{1}{f(b)}$

Alors $\frac{1}{f}$ est décroissante sur $[3;+\infty[$

Exercice17 Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=\sqrt{x+2}$ et $g(x)=\frac{x-3}{x+3}$

ATMANI NAJIB

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer D_f et D_g

2) Déterminer les tableaux de variations de f et g

3) a) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)$

4) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}$: $\forall x\in[-2;+\infty[$

a) Montrer que : h est majoré par 1 et que -1 c'est la valeur maximale absolue de h

b) Étudier les variations de h sur $[-2;+\infty[$

Solution : 1) $f(x)=\sqrt{x+2}$; $g(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+3\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -3\}=\mathbb{R}-\{-3\}=]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$

1) Déterminons les tableaux de variations de f et g

Le tableau de variations de f :

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	

Le tableau de variations de g :

En générale si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et

d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $g(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $C(-3;1)$ et

d'asymptotes les droites d'équations $x=-3$ et $y=1$

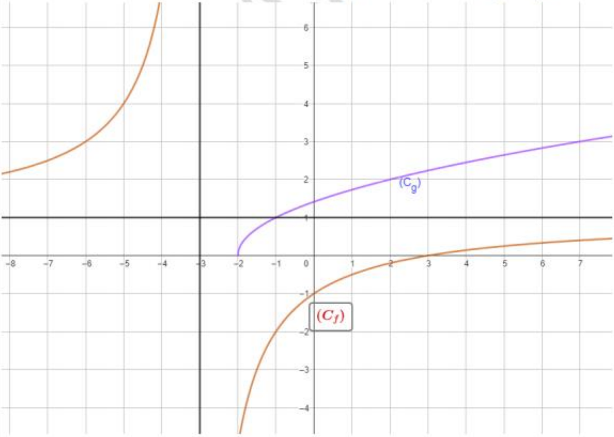
$g(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3+3=6>0$

Donc :f est strictement croissante sur : $]-\infty;-3[$ et $]-3;+\infty[$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

3) a) Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

PROF. ATMANI NAJIB



b) Résolvons graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)$

Soit : $x\in\left[-2,+\infty\right[: x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)\Leftrightarrow x-x\sqrt{x+2}=3+3\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x-3=\left(x+3\right)\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\frac{x-3}{x+3}=\sqrt{x+2}$

$x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)\Leftrightarrow g\left(x\right)=f\left(x\right)$

Et puisque pas de points d'intersections entre $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ alors : $S=\varnothing$

4) Soit h la fonction définie par : $h\left(x\right)=\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}$: $\forall x\in\left[-2;+\infty\right[$

a) →Montrons que : h est majoré par 1 :

Soit : $x\in\left[-2,+\infty\right[$: $h\left(x\right)-1=\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}-1=\frac{\sqrt{x+2}-3-\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}==\frac{-6}{\sqrt{x+2}+3}<0$

Donc : h est majoré par 1 :

→Montrons que : -1 c'est la valeur maximale absolue de h

Soit : $x\in\left[-2,+\infty\right[$: $h\left(x\right)-\left(-1\right)=\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}+1=\frac{\sqrt{x+2}-3+\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+3}==\frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+3}\geq 0$ et $h\left(-2\right)=-1$

Donc : $h\left(x\right)\leq h\left(-2\right)$: $\forall x\in\left[-2;+\infty\right[$

Donc : -1 c'est la valeur maximale absolue de h

b) Etudions les variations de h sur $\left[-2;+\infty\right[$: $h=g\circ f$

Puisque f est croissante sur $\left[-2;+\infty\right[$ et $f\left(\left[-2;+\infty\right[\right)\subset\left[0;+\infty\right[$ et g est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ alors $h=g\circ f$ est croissante sur $\left[-2;+\infty\right[$

Exercice18 : Soient f et g deux fonctions numériques définies par : $f\left(x\right)=x^2-x$ et $g\left(x\right)=\sqrt{x}$

ATMANI NAJIB

1) Dresser les tableaux de variations de f et g

2) Soit : h la fonction numérique définie par : $h(x)=(f\circ g)(x)$

a) Déterminer D_h

b) Etudier les variations de h sur $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ et $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

c) Montrer que h admet un minimum absolu au point d'abscisse $\frac{1}{4}$

3) Soit : k la fonction numérique définie par : $k(x)=(g\circ f)(x)$

a) Déterminer D_k

b) Etudier les variations de k

c) Calculer $k(x)=(g\circ f)(x)$; $\forall x\in D_k$

4)a) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

b) Résoudre graphiquement sur $[0;+\infty[$ l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)}\leq 1$

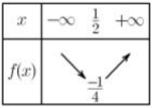
(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 2 points d'abscisse : 0 et 1,75

Solution : 1) Dressons les tableaux de variations de f et g

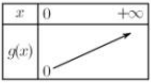
a) $f(x)=x^2-x$; $D_f=\mathbb{R}$: On a $a=1>0$; $b=-1$ et $c=0$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$ et $\left(f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\right)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\frac{1}{2}$


x
$-\infty$
$\frac{1}{2}$
$+\infty$
$f(x)$
$\frac{-1}{4}$

b) $g(x)=\sqrt{x}$; $D_g=[0;+\infty[$


x
0
$+\infty$
$g(x)$
0

1)Soit : h la fonction numérique définie par : $h(x)=(f\circ g)(x)$

a) Déterminons D_h

$D_h=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_g\ et\ g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 0\ et\,g(x)\in\mathbb{R}\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 0\}=[0;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

b) →Etudions les variations de h sur : $\left[0,\frac{1}{4}\right]$

Puisque g est croissante sur $\left[0,\frac{1}{4}\right]$

et $g\left(\left[0,\frac{1}{4}\right]\right)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et f est décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left[0,\frac{1}{4}\right]$

→Etudions les variations de h sur : $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

Puisque g est croissante sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

et $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et f est croissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors $h=f\circ g$ est croissante sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

c) Montrons que h admet un minimum absolu au point d'abscisse $\frac{1}{4}$

C'est-à-dire Montrons que : $h(x)\leq h\left(\frac{1}{4}\right)$; $\forall x\in[0;+\infty[$

$$h\left(\frac{1}{4}\right)=(f\circ g)\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

Le tableau de variations de h :

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$h(x)$		↘	$\frac{-1}{4}$	↗	

D'après le tableau de variations : h admet un minimum absolu au point d'abscisse $\frac{1}{4}$

C'est-à-dire on a $h(x)\geq h\left(\frac{1}{4}\right)$; $\forall x\in[0;+\infty[$

Donc : $h(x)\geq -\frac{1}{4}$; $\forall x\in[0;+\infty[$

3) Soit : k la fonction numérique définie par : $k(x)=(g\circ f)(x)$

a) Déterminons D_k : $D_k=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in\mathbb{R} \text{ et } f(x)\geq 0\}$

$f(x)\geq 0\Leftrightarrow x^2-x\geq 0\Leftrightarrow x(x-1)\geq 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

PROF: ATMANI NAJIB

$D_k=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

b) Etudions les variations de k : $k(x)=(g\circ f)(x)$

→Etudions les variations de k sur : $]-\infty;0]$

Puisque f est décroissante sur $]-\infty;0]$

et $f(]-\infty;0])=[0,+\infty[$ et g est croissante sur $[0,+\infty[$ alors $k=g\circ f$ est décroissante sur $]-\infty;0]$

→Etudions les variations de k sur : $[1;+\infty[$

Puisque f est croissante sur $[1;+\infty[$

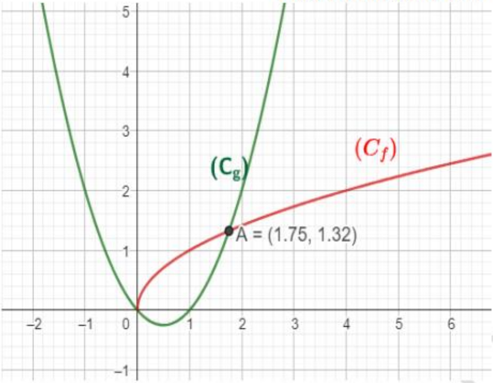
et $f([1;+\infty[)=[0;+\infty[$ et g est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $k=g\circ f$ est croissante sur $[1;+\infty[$

c) Calculons : $k(x)=(g\circ f)(x)$; $\forall x\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

Soit $x\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$: $k(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-x}$

Donc : $k(x)=\sqrt{x^2-x}$; $\forall x\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

4)a) Traçage des courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère



b) Résolution graphique de l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)}\leq 1$

$D_E=\{x\in\mathbb{R}/x\in[0;+\infty[\ et\ x^2-x\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\in[0;+\infty[\ et\ x\neq 0\ et\ x\neq 1\}=]0;1[\cup]1;+\infty[$

Dans : $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f(x)>0$

PROF: ATMANI NAJIB

$\frac{g(x)}{f(x)} \le 1 \Leftrightarrow g(x) \le f(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]0\ ;\ 1,75]$

Finalement : $S =]0\ ;\ 1,75]$

Exercice19 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 - 1 + E(x) \times (E(x) - 2x)$

1) Calculer : $f(2)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)$; $f(2025)$

2) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1 = [0;1[$

3) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

4) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;4[$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : $f(x) = x^2 - 1 + E(x) \times (E(x) - 2x)$

1) Calculons : $f(2)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)$; $f(2025)$

$f(2) = 4 - 1 + E(2) \times (E(2) - 2 \times 2) = 3 + 2 \times (2 - 4) = -1$ car : $E(2) = 2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 + E\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(E\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{4} + 0 \times (0 - 1) = -\frac{3}{4}$ car : $E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

En effet : $0 \le \frac{1}{2} < 0 + 1$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 1 + E\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(E\left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{5}{4} - 2 \times (-2 + 3) = \frac{5}{4} - 2 = \frac{-3}{4}$

car : $E\left(-\frac{3}{2}\right) = -2$ En effet : $-2 \le -\frac{3}{2} < -2 + 1$

$f(2025) = 2025^2 - 1 + E(2025) \times (E(2025) - 2 \times 2025) = 2025^2 - 1 + 2025 \times (2025 - 2 \times 2025)$

car : $E(2025) = 2025$

$f(2025) = 2025^2 - 1 + 2025 \times (2025 - 2 \times 2025) = 2025^2 - 1 + 2025^2 - 2 \times 2025^2 = -1$

2) On a : $D_f = \mathbb{R}$

$x \in [0;1[\Leftrightarrow 0 \le x \prec 1$ Donc : $E(x) = 0$

Donc : $f(x) = x^2 - 1 + 0 \times (0 - 2x) = \boxed{x^2 - 1}$

3) - $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x + 1 \in \mathbb{R}$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x+1) = (x+1)^2 - 1 + E(x+1) \times (E(x+1) - 2(x+1))$

$= x^2 + 2x + 1 - 1 + (E(x) + 1) \times (E(x) + 1 - 2x - 2) = x^2 + 2x + (E(x) + 1) \times (E(x) - 2x - 1)$

$= x^2 + 2x + (E(x))^2 - 2xE(x) - E(x) + E(x) - 2x - 1 = x^2 - 1 + (E(x))^2 - 2xE(x)$

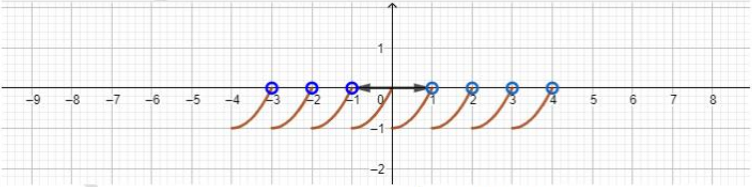
$x^2-1+E(x)\times\left(E(x)-2x\right)=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

4) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur :

$D_E=D_f\cap[0;1[=\mathbb{R}\cap[0;1[=[0;1[$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $[-4;4[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$



Exercice20 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{E(x)+\sin x}{x} & ;\ si\quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Déterminer : D_f

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $|f(x)-1|\leq\dfrac{2}{|x|}$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$

2) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $|f(x)-1|\leq\dfrac{2}{|x|}$

Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$; $|f(x)-1|=\left|\dfrac{E(x)+\sin x}{x}-1\right|=\left|\dfrac{E(x)+\sin x-x}{x}\right|=\dfrac{|E(x)+\sin x-x|}{|x|}$

$|f(x)-1|\leq\dfrac{|E(x)-x|}{|x|}+\dfrac{|\sin x|}{|x|}$

On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x$ donc : $-1\prec E(x)-x\leq 0\leq 1$ donc : $|E(x)-x|\leq 1$

Donc : $|f(x)-1|\leq\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|x|}$ c'est-à-dire : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $|f(x)-1|\leq\dfrac{2}{|x|}$

Exercice 21 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=(-1)^{E(x)}\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}-E(x)\right)^2}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $-\dfrac{1}{2}\leq x-\dfrac{1}{2}-E(x)\prec\dfrac{1}{2}$

2) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

3) a) Montrer que 2 est une période pour la fonction f

b) Etudier la parité de f

c) En déduire que $[0;1]$:est un domaine d'étude de f

4)Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=-x^2+x$

a) Etudier les variations de g sur : $[0;1]$

b) Montrer que : $f(x)=h\circ g(x) \quad \forall x\in[0;1]$ avec h une fonction à déterminer

c) Donner le Tableau de variation de f sur : $[-1;1]$

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $-\frac{1}{2}\le x-\frac{1}{2}-E(x)\prec\frac{1}{2}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$

On a : $E(x)\le x\prec E(x)+1$ donc : $-\frac{1}{2}\le x-\frac{1}{2}-E(x)\prec\frac{1}{2}$

2) Déterminons l'ensemble de définition de f :

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}-E(x)\right)^2\ge 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\left(x-\frac{1}{2}-E(x)\right)^2\le\frac{1}{4}\right\}$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}-E(x)\right)^2}\le\sqrt{\frac{1}{4}}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\left|x-\frac{1}{2}-E(x)\right|\le\frac{1}{2}\right\}$$

$=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{2}\le x-\frac{1}{2}-E(x)\le\frac{1}{2}\right\}$ D'après 1) on a : $\forall x\in\mathbb{R}$; $-\frac{1}{2}\le x-\frac{1}{2}-E(x)\prec\frac{1}{2}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

PROF: ATMANI

2)a) - $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+2\in\mathbb{R}$

- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x+2)=(-1)^{E(x+2)}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x+2-\frac{1}{2}-E(x+2)\right)^2}=(-1)^{E(x)+2}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x+2-\frac{1}{2}-E(x)-2\right)^2}$

$$=(-1)^{E(x)}\times(-1)^2\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}-E(x)\right)^2}=(-1)^{E(x)}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}-E(x)\right)^2}=f(x)$$

L'application f est donc périodique de période 2.

b) Etudions la parité de f : - si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=(-1)^{E(-x)}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(-x-\frac{1}{2}-E(-x)\right)^2}$$

On peut montrer que : $E(-x)=-E(x)-1$; $\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et $E(-x)=-E(x)$ si $x\in\mathbb{Z}$

Si : $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$:

$$f(-x)=(-1)^{-E(x)-1}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(-x-\frac{1}{2}+E(x)+1\right)^2}=(-1)^{-E(x)}\times(-1)^{-1}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(-x+\frac{1}{2}+E(x)\right)^2}$$

$$f(-x)=(-1)^{-E(x)}\times(-1)^{-1}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}-E(x)\right)^2}=-1(-1)^{E(x)}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}-E(x)\right)^2}$$

ATMANI NAJIB

Car : $(-1)^{-E(x)}=(-1)^{E(x)}$

Donc : $f(-x)=-f(x)$ Si : $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Si : $x\in\mathbb{Z}$: $f(x)=(-1)^{x}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}-x\right)^{2}}=(-1)^{x}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}-x\right)^{2}}=0$

Donc : $f(-x)=-f(x)$ Si : $x\in\mathbb{Z}$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-x)=-f(x)$

Donc f est impair

c) Puisque 2 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur :
$D=D_f\cap[0;2[=\mathbb{R}\cap[0;2[=[0;2[$

Donc :il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=2$ par exemple : $D=D_f\cap[-1;1]=[-1;1]$

et puisque f est aussi impair il suffit d'étudier f sur $D_E=[-1;1]\cap[0;+\infty[=[0;1]$

4)a) a) Etude des variations de g sur : $[0;1]$

$g(x)=-x^2+x$

x	0	$1/2$	1
$g(x)$	0 ↗	$1/4$	↘ 0

b) Montrons que : $f(x)=h\circ g(x)\quad\forall x\in[0;1]$ avec h une fonction à déterminer

$f(x)=(-1)^{E(x)}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}-E(x)\right)^{2}}$ et $g(x)=-x^2+x$

-Si $x\in[0;1[$: $E(x)=0$

$f(x)=(-1)^{0}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}-0\right)^{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x^{2}-x+\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{-x^{2}+x}$

- Si $x=1$: $E(x)=1$ et $f(x)=(-1)^{1}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(1-\frac{1}{2}-1\right)^{2}}=0$

Donc : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{-x^{2}+x} \ si\ x\in[0;1[\\ f(1)=0 \end{cases}$

On pose : $h(x)=\sqrt{x}$ on a donc :

-Si $x\in[0;1[$; $h(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{-x^{2}+x}=f(x)$

$h\circ g(1)=h(g(1))=h(0)=0=f(1)$

Donc : $f(x)=h\circ g(x)\quad\forall x\in[0;1]$ avec $h(x)=\sqrt{x}$

c) Détermination du Tableau de variation de f sur : $[-1;1]$

PROF: ATMANI NAJIB

- Sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$; g est croissante et h est croissante sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$

Donc : f est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

- Sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$; g est décroissante et h est croissante sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$

Donc : f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$

Et puisque f est impair alors f est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ et f est décroissante sur $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$

x	-1		$-1/2$		0		$1/2$		1
$f(x)$		↘		↗		↗	0	↘	2

Exercice22 : Soit f l'application définie par $:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$

$$f(n;m)=E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)$$

1) Montrer que ; $\forall(n;m)\in\mathbb{Z}^2$; $E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=n$

2) l'application f est-elle injective ? est-elle surjective ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien