http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°11 : Généralités sur les fonctions

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\sqrt{-5x^2+6x+8}-2x+1$ 2) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-2\sqrt{x}-15}$ 3) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

4) $f(x)=\sqrt{-2x(x-2)(x^2-8x+16)}$

Solution : 1) $f(x)=\sqrt{-5x^2+6x+8}-2x+1$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-5x^2+6x+8\geq 0\right\}$

Calculons le discriminant du trinôme $-5x^2+6x+8$: $a=-5$; $b=6$; $c=8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=6^2-4\times 8\times(-5)=36+160=196=14^2>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6-\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\dfrac{-6-14}{-10}=2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6+\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\dfrac{-6+14}{-10}=-\dfrac{4}{5}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-4/5$		2		$+\infty$
$-5x^2+6x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left[-\dfrac{4}{5};2\right]$

2) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-2\sqrt{x}-15}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-2\sqrt{x}-15\neq 0 \text{ et } x\geq 0\right\}$

$x-2\sqrt{x}-15=0\Leftrightarrow \sqrt{x}^2-2\sqrt{x}-15=0$

On pose : $\sqrt{x}=X$ donc l'équation devient : $X^2-2X-15=0$

Le discriminant est Δ = (-2)² – 4 x 1 x (-15) = 64 et ses solutions sont :

$X_1=\dfrac{2-\sqrt{64}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\dfrac{2+\sqrt{64}}{2\times 1}=5$

Donc on a : $\sqrt{x}=-3$ et $\sqrt{x}=5$

Mais : $\sqrt{x}=-3$ n'a pas de solution et $\sqrt{x}=5\Leftrightarrow x=5$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq 5 \text{ et } x\geq 0\right\}$

Donc : $D_f=[0;5[\cup]5;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3x+1>0\right\}$

$2x^2-3x+1$ Calculons son discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1

Donc : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

PROF: ATMANI NAJIB

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{9}}{2a} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

4) $f(x) = \sqrt{-2x(x-2)(x^2-8x+16)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x(x-2)(x^2-8x+16) \geq 0\}$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x-2=0$ ou $x=0$

Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x=2$ ou $x=0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $x^2-8x+16$

Calculons son discriminant : $a=1$; $b=-8$; $c=16$

Donc : $\Delta = b^2-4\times a\times c = (-8)^2-4\times 1\times 16 = 64-64 = 0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=1>0$ et $\Delta=0$, alors : $x^2-8x+16 \geq 0$

La racine double est : $x_1 = \frac{8}{2\times 1} = 4$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x=4$ ou $x=2$ ou $x=0$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-8x+16$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Par suite : $D_f = [0;2]$

Exercice2 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{4+x} \times \sqrt{6-x}$

1)a) Déterminer D_f

b) Calculer : $f(0)$; $f(-3)$

c) Déterminer les antécédents de 0 et 1 par f (s'ils existent)

4) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{-x^2+2x+24}$ Montrer que : $f = g$

Solution : 1) a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4+x \geq 0 \ \ et \ \ 6-x \geq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -4 \ \ et \ \ x \leq 6\}$ Donc $D_f = [-4,6]$

PROF ATMANI NAJIB

b) Calcul des images :

$f(0)=\sqrt{4+0}\times\sqrt{6-0}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ et $f(-3)=\sqrt{4-3}\times\sqrt{6+3}=\sqrt{1}\times\sqrt{9}=3$

c)

- x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f .

Équivaut à: chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=0$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}=0$ ou $\sqrt{6-x}=0$

Équivaut à : $4+x=0$ ou $6-x=0$

Équivaut à : $x=-4$ ou $x=6$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : -4 et 6.

- x est l'antécédents de 1 par f signifie que 1 est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=1$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=0\Leftrightarrow(4+x)(6-x)=1\Leftrightarrow 24-4x+6x-x^2=1$

Équivaut à : $-x^2+2x+23=0$

$\Delta=b^2-4ac=4+4\times(-23)=4+92=96>0$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{96}}{2\times-1}=\frac{2-\sqrt{96}}{2}$ et $x_1=\frac{-2-\sqrt{96}}{2\times-1}=\frac{2+\sqrt{96}}{2}$

Finalement les antécédents de 1 par f sont : $\frac{2-\sqrt{96}}{2}$ et $\frac{2+\sqrt{96}}{2}$

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-x^2+2x+24}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/-x^2+2x+24\geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 24\times -1=4+96=100>0$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{100}}{2\times-1}=\frac{8}{-2}=-4$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{100}}{2\times-1}=\frac{-12}{-2}=6$

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
$-x^2+2x+24$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_g=[-4,6]$

On a donc : $D_f=D_g$.

$f(x)=\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=\sqrt{(4+x)(6-x)}=\sqrt{-x^2+2x+24}=g(x)$

Conclusion : $f=g$

Exercice3 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 2) $f(x)=x^2+2x+\frac{1}{x}$

Solution : 1) $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$; $D_g=\{x\in E/g(x)\in\mathbb{R}\}$

PROF:ATMANI NAJIB

$D_g = \{x \in E / x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0$ Signifie $x^2 = -1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $x^2 + 1$ ne s'annule jamais

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

- si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $g(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1}$ donc : $g(-x) = -g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

12) $f(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{x}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$

Signifie $x \neq 0$ Donc : $D_f = \mathbb{R}^*$

☞Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$ alors $-x \in \mathbb{R}^*$

☞ $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + \frac{1}{-x} = x^2 - 2x - \frac{1}{x}$

$f(-x) \neq -f(x)$

Donc : f est une fonction ni paire ni impaire.

Exercice4 : Soient les deux fonctions : $h(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ et $t(x) = x - 1$

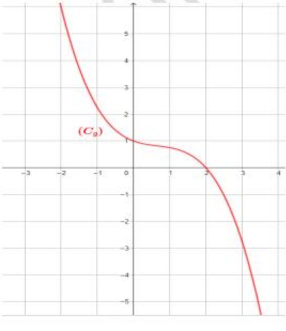
Comparer les fonctions f et g

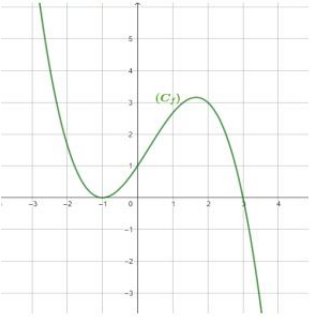
Solution :

- On a $h(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \neq 0$ donc $D_h = \mathbb{R}^*$
- On a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t = \mathbb{R}$

Donc : $f \neq g$

Exercice5 : Soient f et g deux fonctions définies par Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) si dessous : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{(x^2 - x - 2) \times f(x)}{(x^2 - 4) g(x-1)} \leq 0$





PROF: ATMANI NAJIB

Solution : Etudions le signe de : $\frac{(x^2-x-2)\times f(x)}{(x^2-4)g(x-1)}$

$x^2-x-2=0 \quad \Delta=1+8=9$: $x_1=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2$ et $x_1=\frac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\mp 2$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ et $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;3\right]$

$g(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$

$g(x-1)>0 \Leftrightarrow x-1<2 \Leftrightarrow x<3$

Voici donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		2		3		$+\infty$
$x2-x-2$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
$f(x)$		+	|	+	0	+	|	+	0	−	
$x2-4$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$g(x-1)$		+	|	+	|	+	|	+	0	−	
$Q(x)$		+	||	−	0	+	||	+	||	+	

Donc : $S=\left]-2;-1\right]$

Exercice6 : f est une fonction dont voici le tableau de variations

x	0		2		4		5
f	4	↘	−2	↗	6	↘	0

1) Comparer f(0) et f(1)
2) Comparer f(2,5) et f(3)
3) Comparer f(1) et f(4,5)

Solution : 1) Comparons f(0) et f(1) :

Si on place les images de 0 (qui était déjà placé) et 1 dans le tableau en respectant **l'ordre :**

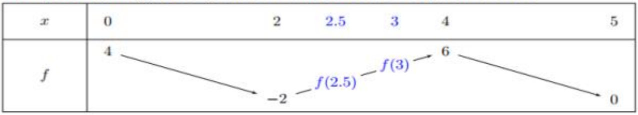
x	0		1		2		4		5
f	4	↘	$f(1)$	↘	−2	↗	6	↘	0

On constate qu'ils sont sur une portion où la fonction est strictement décroissante donc f(0) > f(1)

2) Comparons : f(2,5) et f(3)

PROF: ATMANI NAJIB

Si on place les images de 2,5 et 3 dans le tableau en respectant l'ordre :

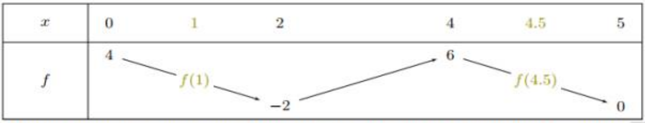


x	0	2	2.5	3	4	5
f	4 ↘	−2 ↗	$f(2.5)$ ↗	$f(3)$ ↗	6 ↘	0

On constate qu'ils sont sur une portion où la fonction est strictement croissante donc f(2.5) < f(3)

3) Comparons : f(1) et f(4,5)

Si on place les images de 1 et 4,5 dans le tableau en respectant l'ordre :



x	0	1	2	4	4.5	5
f	4 ↘	$f(1)$ ↘	−2 ↗	6 ↘	$f(4.5)$ ↘	0

On constate qu'ils ne sont pas sur un intervalle où la fonction est monotone, on ne peut pas conclure !

Exercice7 : Etudier les variations des fonctions définies par : 1) $f(x) = -203x - \sqrt{2}$

2) $g(x) = \dfrac{2012}{x}$ 3) $h(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 2030$ 4) $k(x) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x-1} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : 1) $f(x) = -203x - \sqrt{2}$

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $v : x \to x$

On sait que la fonction $v : x \to x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $-203 < 0$ donc la fonction $-203v$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f = -203v - \sqrt{2}$ aussi décroissante sur $\mathbb{R}$

2) $g(x) = \dfrac{2012}{x}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$

On sait que : $v : x \to \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $g = 2012v$

Alors : g est décroissante sur $]0;+\infty[$ et est décroissante sur $]-\infty;0[$ car $-4 < 0$

3) $h(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 2030$ et $D_f = \mathbb{R}$: On sait que : $v : x \to x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$

On a : $h = \dfrac{1}{2}v - 2030$

Puisque la fonction v est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $\dfrac{1}{2}v$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $\dfrac{1}{2} > 0$

Donc : $h = \dfrac{1}{2}v - 2030$ est croissante sur $\mathbb{R}$

4) $k(x) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x-1} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $D_k = [1;+\infty[$

On a : $k = -\dfrac{1}{2}v - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Puisque la fonction $v : x \to \sqrt{x-1}$ est croissante sur $[1;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

Alors : $-\frac{1}{2}v$ est décroissante sur $[1;+\infty[$ car $-\frac{1}{2}<0$

Donc : $k=-\frac{1}{2}v+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est décroissante sur $[1;+\infty[$

Exercice8 : Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}-\{0;1\}$ el que :

$f(x+1)=\frac{1}{1-f(x)}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ; f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

2)Déduire que f est périodique et $T=3$ est une période de f

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(x+2)=f((x+1)+1)=\frac{1}{1-f(x+1)}$ et on a : $f(x+1)=\frac{1}{1-f(x)}$

Donc : $f(x+2)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-f(x)}}=\frac{1}{\frac{1-f(x)-1}{1-f(x)}}=\frac{f(x)-1}{f(x)}=1-\frac{1}{f(x)}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

2) Calculons : $\forall x\in\mathbb{R}\ ; f(x+3)=?$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(x+3)=f((x+1)+2)$ comme on a : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

Alors : $f(x+3)=f((x+1)+2)=1-\frac{1}{f(x+1)}=1-(1-f(x))=f(x)$

4)Déduisons que f est périodique :
Puisque → $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ x+3\in\mathbb{R}$
→ $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ f(x+3)=f(x)$
Alors : f est périodique et 3 est une période de f

Exercice9 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$

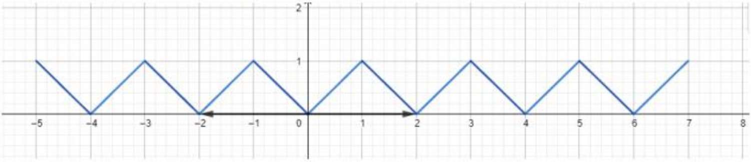
Tel que : $\begin{cases} f(x)=x \quad si \quad x\in[0,1] \\ f(x)=2-x \quad si \quad x\in]1,2] \end{cases}$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $[-5;7]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(2025)$

Solution :1) la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;5[$ est :

PROF: ATMANI NAJIB



---

2) Calculons : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(2026)$

On a : $f(x) = x \ \ si \ \ x \in [0,1]$ et $f(x) = 2 - x \ \ si \ \ x \in]1,2]$

$\rightarrow \frac{1}{2} \in [0,1]$ Donc : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\rightarrow 1 \notin [0,1]$ et $1 \notin]1,2]$ Donc : on ne peut pas utiliser l'expression de $f(x)$

$f(-1) = f(-1+2) = f(1) = 1$ car $1 \in [0,1]$

$\rightarrow 2 \in]1,2]$ Donc : $f(2) = 2 - 2 = 0$

$\rightarrow 2025 \notin [0,1]$ et $2025 \notin]1,2]$ Donc : on ne peut pas utiliser l'expression de $f(x)$

$f(2025) = f(1 + 2 \times 1012) = f(1)$ et $1 \in [0,1]$ car f est 2 périodiques

$f(2025) = f(1) = 1$

Exercice10 : Soit f une fonction tel que : $f(x) = \frac{x}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) a) Soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur les intervalles $I =]-\infty;1[$ et $J =]1;+\infty[$.

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Comparer les deux nombres : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Solution :1) $D_f = \{x \in E \,/\, f(x) \in \mathbb{R}\}$

$D_f = \{x \in E \,/\, x - 1 \neq 0\}$

$D_f = \{x \in E \,/\, x \neq 1\}$

Par suite : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2) a) Soient $x_1 \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrons que : $T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$

PROF: ATMANI NAJIB

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1-1}-\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{x_1(x_2-1)-x_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{x_1x_2-x_1-x_2x_1+x_2}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{\dfrac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}}{x_1-x_2}=\dfrac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}\dfrac{1}{(x_1-x_2)}=\dfrac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$

b)

- Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $I=]-\infty;1[$

Soient : $x_1\in]-\infty;1[$ et $x_2\in]-\infty;1[$ tel que : $x_1\neq x_2$

Donc : $\begin{cases}x_1<1\\x_2<1\end{cases}$ alors : $\begin{cases}x_1-1<0\\x_2-1<0\end{cases}$

Donc : $(x_1-1)(x_2-1)>0$

Donc : $\dfrac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}<0$

Et par suite f est strictement décroissante sur : $I=]-\infty;1[$

- Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $J=]1;+\infty[$

Soient : $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$ tel que : $x_1\neq x_2$

Donc : $\begin{cases}x_1>1\\x_2>1\end{cases}$ alors : $\begin{cases}x_1-1>0\\x_2-1>0\end{cases}$

Donc : $(x_1-1)(x_2-1)>0$

Donc : $\dfrac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}<0$

Et par suite f est strictement décroissante sur : $J=]1;+\infty[$

5) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

4) Comparons les deux nombres : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

On a : $\sqrt{2}\in]1;+\infty[$ et $\sqrt{3}\in]1;+\infty[$ et $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ et f est strictement décroissante sur : $J=]1;+\infty[$

Donc : $f(\sqrt{2})>f(\sqrt{3})$

Donc : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}>\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Exercice11 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x|x|-2x+2$

1) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

PROF: ATMANI NAJIB

2) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$-x|x|+2x-2+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

3) Résoudre graphiquement l'inéquation : $1\leq f(x)\leq 3$.

Solution :1) a) ☞ sur $\mathbb{R}^+$:

Soit : $x\in\mathbb{R}^+$ alors : $|x|=x$

Donc : $f(x)=x^2-2x+2$:f est une fonction polynôme : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

On a : $a=1$; $b=-2$ et $c=2$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times 1}=1$ et $f(1)=1^2-2\times 1+2=1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une partie de la parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=1$

b) ☞ sur $\mathbb{R}^-$:

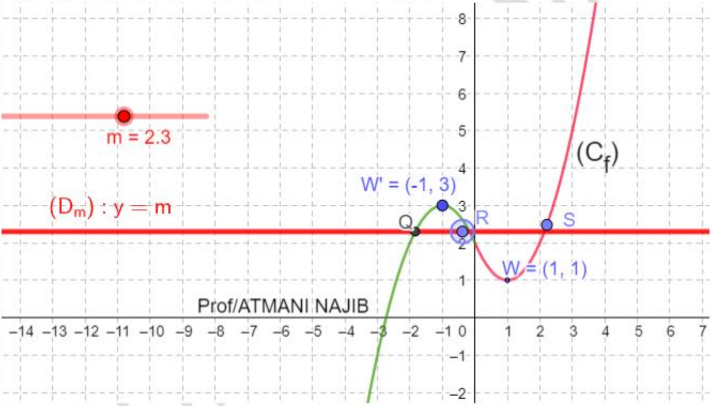
Soit : $x\in\mathbb{R}^-$ alors : $|x|=-x$

Donc : $f(x)=-x^2-2x+2$:f est une fonction polynôme : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

On a : $a=-1$; $b=-2$ et $c=2$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$ et $f(-1)=-(-1)^2-2\times(-1)+2=3$

Alors : la courbe (C_f) c'est une partie de la parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(-1;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=-1$



2) Résolution graphique de l'équation $-x|x|+2x-2+m=0$ avec $m\in\mathbb{R}$:

$-x|x|+2x-2+m=0$ Signifie $m=x|x|-2x+2$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si: $m>3$ ou $m<1$ il y'a une solution

Si: $m=3$ ou $m=1$ il y'a deux solutions

Si: $1<m<3$ il y'a une trois solutions

3) Résolution graphique de l'inéquation : $1\leq f(x)\leq 3$

$1\leq f(x)\leq 3$ Signifie (C_f) comprise entre les droites : $y=1$ et $y=3$

On va résoudre d'abord l'équation : $f(x)=3$

☞ Sur $\mathbb{R}^+$: $f(x)=3$ Signifie que : $(x-1)^2+1=3$

Signifie $(x-1)^2=2$ Signifie que : $x-1=\sqrt{2}$ ou $x-1=-\sqrt{2}$

Signifie $x=\sqrt{2}+1$ ou $x=-\sqrt{2}+1\notin\mathbb{R}^+$

Signifie $x=\sqrt{2}+1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$: $f(x)=3$ Signifie $-(x+1)^2+3=3$

Signifie $-(x+1)^2=0$

Signifie $x=-1$

On va aussi résoudre l'équation : $f(x)=1$

☞ Sur $\mathbb{R}^+$: $f(x)=1$ Signifie $(x-1)^2+1=1$

Signifie $(x-1)^2=0$ Signifie $x=1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$: $f(x)=1$ Signifie $-(x+1)^2+3=1$ Signifie $-(x+1)^2=-2$ Signifie $(x+1)^2=2$

Signifie $x+1=\sqrt{2}$ ou $x+1=-\sqrt{2}$ Signifie $x=\sqrt{2}-1\notin\mathbb{R}^-$ ou $x=-\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}^-$ Signifie $x=-\sqrt{2}-1$

Par suite : $1\leq f(x)\leq 3$ Signifie $-\sqrt{2}-1\leq x\leq 1+\sqrt{2}$

Finalement : $S=\left[-\left(\sqrt{2}+1\right);1+\sqrt{2}\right]$

Exercice12 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x)=-x^2+4x+3$ et $g(x)=2x$

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)a) En déduire que : f est majorée sur $\mathbb{R}$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$ On a : $\frac{27}{4}\leq f(x)\leq 7$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-1;2]$ On a : $-2\leq f(x)\leq 7$

3)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

4)Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g)

5) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

6) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)>0$

7) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x)>g(x)$

8) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=-x^2+4x+3$

1) On a : $f(x)=-x^2+4x+3$: f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=-1$; $b=4$ et $c=3$

Donc $\alpha=-\frac{4}{2a}=-\frac{4}{2\times(-1)}=2$ et $f(2)=-(2)^2+4\times2+3=-4+8+3=7$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(2;7)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=2$

Comme : $\boxed{a=-1<0}$ alors :

La fonction f est décroissante sur $[2;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;2]$

Tableau de variations de f : On a $a=-1<0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$

2)a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(2)=7$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le f(2)$

Par suite : $f(x)\le 7$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : f est majorée par 7 sur $\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$ alors : $2\le x\le\frac{5}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $I=[2;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[2;\frac{5}{2}\right]$

Alors : $f\left(\frac{5}{2}\right)\le f(x)\le f(2)$ et comme : $f(2)=7$ et $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\left(\frac{5}{2}\right)^2+4\times\frac{5}{2}+3=-\frac{25}{4}+10+3=13-\frac{25}{4}=\frac{27}{4}$

Par suite : $\frac{27}{4}\le f(x)\le 7$

b) Soit : $x\in[-1;2]$ On a alors : $-1\le x\le 2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est

PROF: ATMANI NAJIB

strictement croissante sur $J =]-\infty;2]$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-1;2]$

Alors : $f(-1) \le f(x) \le f(2)$ et comme : $f(-1) = -(-1)^2 + 4\times(-1) + 3 = -2$ Et $f(2) = 7$

Par suite : $-2 \le f(x) \le 7$

3)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ Signifie $-x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4\times(-1)\times 3 = 16 + 12 = 28 > 0$

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{28}}{2\times(-1)} = \frac{-4+\sqrt{4\times 7}}{-2} = \frac{-4+2\sqrt{7}}{-2} = \frac{-2\left(2-\sqrt{7}\right)}{-2} = 2-\sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-4-\sqrt{28}}{2\times(-1)} = \frac{-4-\sqrt{4\times 7}}{-2} = \frac{-4-2\sqrt{7}}{-2} = \frac{-2\left(2+\sqrt{7}\right)}{-2} = 2+\sqrt{7}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{7};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{7};0\right)$

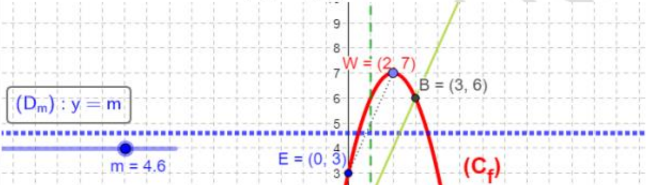
b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

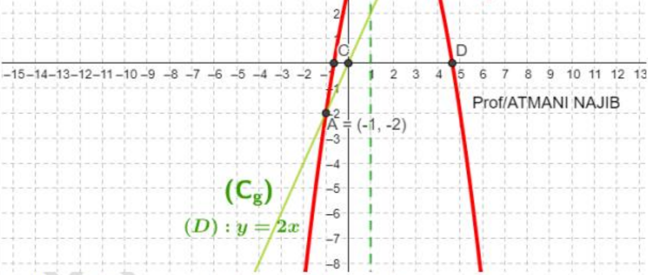
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0) = -0^2 + 4\times 0 + 3 = 3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;3)$

4) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :





5) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -1$ et $x = 3$ donc $S = \{-1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $-x^2 + 4x + 3 = 2x$ c'est-à-dire : $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = -1$; $b = 2$ et $c = 3$; $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$

Donc : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2+4}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2-4}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3$

Donc : $S = \{-1;3\}$

6) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) > 0$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (Ox) si $x \in \left]2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right[$

Donc $S = \left]2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x) > 0$:

$f(x) > 0$ Signifie $-x^2 + 4x + 3 > 0$

Les racines sont : $x_1 = 2-\sqrt{7}$ et $x_2 = 2+\sqrt{7}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$-x^2+4x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S = \left]2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right[$

7) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) > g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in \left]-1;3\right[$

Donc $S=\left]-1;3\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $f(x)>g(x)$:

$f(x)>g(x)$ Signifie : $-x^2+4x+3>2x$ C'est-à-dire : $-x^2+2x+3>0$

Les racines sont : $x_1=-1$ et $x_2=3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=\left]-1;3\right[$

8) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m>7$ l'équation n'admet pas de solution
Si : $m=7$ il y'a une solution c'est : x = 2
Si : $m<7$ il y'a deux solutions

Exercice13 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{-2|x|+1}{|x|-2}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé

1) Vérifier que (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés

2) Etudier les variations de f sur $\left]2;+\infty\right[$ et en déduire les variations de f dans $\left]-\infty;-2\right[$

4) Soit g une fonction numérique définie sur $\left]1;+\infty\right[$ tel que : $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-4x^3+1}{x^3-1}\right)$

a) Vérifier que : $g(x)=f(2x^3)$; $\forall x\in\left]1;+\infty\right[$

b) En déduire les variations de g dans $\left]1;2\right]$

Solution :1) Vérifions que (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés

Etudions la parité de f

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x|-2\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq 2\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -2 \text{ et } x\neq 2\}=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

- si $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$
- $f(-x)=\dfrac{-2|-x|+1}{|-x|-2}=\dfrac{-2|x|+1}{|x|-2}=f(x)$ C'est à dire : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,
Par suite : (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés

2) Etudions les variations de f sur $\left]2;+\infty\right[$

Soit : $x\in\left]2;+\infty\right[$: $f(x)=\dfrac{-2|x|+1}{|x|-2}=\dfrac{-2x+1}{x-2}$

En générale si : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\frac{-2x+1}{x-2}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $C(2;-2)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=2$ et $y=-2$

$f(x)=\frac{-2x+1}{x-2}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3>0$

Donc : f est strictement croissante sur : $]2;+\infty[$

Et comme f est une fonction paire alors : f est strictement décroissante sur : $]-\infty;-2[$

4) Soit g une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ tel que : $g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-4x^3+1}{x^3-1}\right)$

a) Vérifions que : $g(x)=f(2x^3)$; $\forall x\in]1;+\infty[$

Soit : $x\in]1;+\infty[$: $f(2x^3)=\frac{-2\times 2x^3+1}{2x^3-2}=\frac{-4x^3+1}{2x^3-2}=\frac{1}{2}\frac{-4x^3+1}{x^3-1}=g(x)$

Donc : $g(x)=f(2x^3)$; $\forall x\in]1;+\infty[$

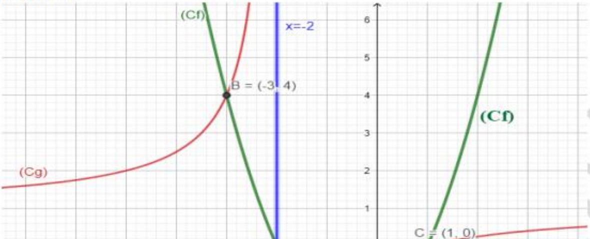
b) Déduisons les variations de g dans $]1;2]$

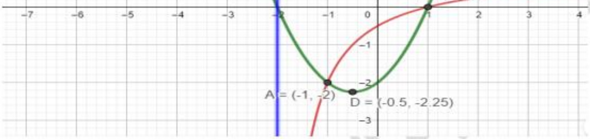
Soit $x\in]1;2]$ donc : $g(x)=f(2x^3)$

On pose : $h(x)=2x^3$ donc : $g(x)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$

Puisque h est croissante sur $]1;2]$ et $h(]1;2])=]2;16]$ et f est croissante sur $]2;16]$ alors $g=f\circ h$ est croissante sur $]1;2]$

Exercice14 : Soient f et g deux fonctions définies par Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) si dessous :





1) Déterminer D_f et D_g 2) On pose : $f(x)=ax^2+bx+c$ et $g(x)=\dfrac{x+\alpha}{x+2}$

Graphiquement :a) Déterminer les points d'intersections de (C_f) et (C_g)

b) Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$ c) Résoudre l'inéquation $f(x)>g(x)$

d) Déterminer les variations de f et g

d) Déterminer : $f(]-\infty;-1])$; $f\left(\left]-1;-\frac{1}{2}\right]\right)$; $f\left(\left[-\frac{1}{2};0\right[\right)$; $f(]0;+\infty[)$

3)Montrer que : $f(x)=x^2+x-2$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$

5) Déterminer : $D_{g\circ f}$ et les variations de $g\circ f$

Solution :1) a) $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2) a) Graphiquement les points d'intersections de (C_f) et (C_g) sont : $A(1;0);B(-1;-2);B(-3;4)$

2) b) Pour déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ et $x=-1$ et $x=-3$ par suite : $S=\{-3;-1;1\}$

c) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-\infty;-3[\cup]-2;-1[\cup]1;+\infty[$

Donc : $S=]-\infty;-3[\cup]-2;-1[\cup]1;+\infty[$

d) Déterminons les variations de f et g :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-9/4$	↗

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

d) Graphiquement :

$f(]-\infty;-1])=]-2;+\infty[$; $f\left(\left]-1;-\frac{1}{2}\right]\right)=\left[-\frac{9}{4};-2\right[$; $f\left(\left[-\frac{1}{2};0\right[\right)=\left[-\frac{9}{4};-2\right]$; $f(]0;+\infty[)=]-2;+\infty[$

3)a) Montrons que : $f(x)=x^2+x-2$

Puisque : $f(0)=-2$ alors : $c=-2$

Puisque : $f(1)=0$ et $f(-2)=0$ alors : $\begin{cases}a+b-c=0\\4a-2b-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\4a-2b=2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

D'où : $f(x)=x^2+x-2$

b) Montrons que : $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$

On a : $g(x)=\frac{x+\alpha}{x+2}$ et puisque : $g(1)=0$ alors : $\frac{1+\alpha}{3}=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$ d'où : $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$

5) Déterminons : $D_{g\circ f}$ et les variations de $g\circ f$

a) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / x\in D_f \ \ et \ \ f(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / x\in\mathbb{R} \ et \ \ x^2+x-2\neq -2\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / x\in\mathbb{R} \ et \ \ x^2+x\neq 0\}$

$D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\{-1;0\}$

b) Etude des variations de : $g\circ f$

- Puisque f est décroissante sur $]-\infty;-1[$ et $f(]-\infty;-1])=]-2;+\infty[$ et g est croissante sur $]-2;+\infty[$ alors $g\circ f$ est décroissante sur $]-\infty;-1[$

Remarque : On ne peut pas étudier $g\circ f$ sur : $]-1;0[$ car f n'est pas monotone sur $]-1;0[$

- Puisque f est décroissante sur $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ et $f\left(\left]-1;-\frac{1}{2}\right]\right)=\left[-\frac{9}{4};-2\right[$ et g est croissante sur $\left[-\frac{9}{4};-2\right[$ alors $g\circ f$ est décroissante sur $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$
- Puisque f est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};0\right[$ et $f\left(\left[-\frac{1}{2};0\right[\right)=\left[-\frac{9}{4};-2\right]$ et g est croissante sur $\left[-\frac{9}{4};-2\right[$ alors $g\circ f$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};0\right[$
- Puisque f est croissante sur $]0;+\infty[$ et $f(]0;+\infty[)=]-2;+\infty[$ et g est croissante sur $]-2;+\infty[$ alors $g\circ f$ est croissante sur $]0;+\infty[$

Exercice15 : Soient f et g deux fonctions numériques définies par :

$f(x)=-x^2+2x+1$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

1) Dresser le tableau de variation de f et de g

2) Vérifier que : $g(2)=f(2)$

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère en précisant les points d'intersections

4) Déterminer graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[1;2]$; $[2;+\infty[$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $2x-\sqrt{x-1}\geq x^2-1$

6) Soit : h une fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=-x+2+2\sqrt{x-1}$

PROF. ATMANI NAJIB

a) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in[1;+\infty[$

b) En déduire les variations de h sur $[1;+\infty[$ et dresser son tableau de variation

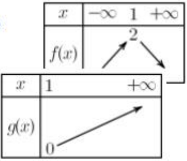
c) Soit : $a\in[3;+\infty[$; Montrer que : $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\geq-\frac{1}{2}$

Solution : 1) $\rightarrow f(x)=-x^2+2x+1$; $D_f=\mathbb{R}$ On a $a=-1<0$; $b=2$ et $c=1$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=1$ et $\left(f(1)=2\right)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

$\rightarrow g(x)=\sqrt{x-1}$; $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq1\}=[1;+\infty[$


x
$-\infty$
1
$+\infty$
$f(x)$
2
x
1
$+\infty$
$g(x)$
0

2) Vérifions que : $g(2)=f(2)$: $f(x)=-x^2+2x+1$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

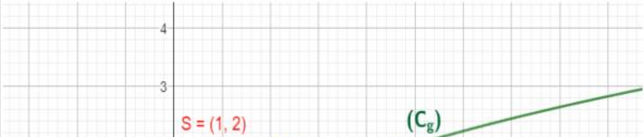
$f(2)=-2^2+2\times2+1=-4+4+1=1$ et $g(2)=\sqrt{2-1}=1$

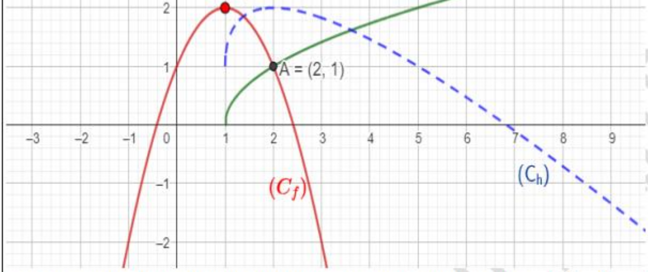
Donc : $g(2)=f(2)$

Graphiquement : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;1)$

3) Traçage des courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

PROF: ATMANI NAJ





4) Déterminons graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[1;2]$; $[2;+\infty[$

$g([1;2])=[0;1]$ et $g(\,[2;+\infty[)=[1;+\infty[$

5) Résolvons graphiquement l'inéquation : $x^2-4x+3\left(2-\sqrt{x}\right)<0$

Soit : $x\in[1;+\infty[$; $2x-\sqrt{x-1}\geq x^2-1 \Leftrightarrow -x^2+2x+1\geq\sqrt{x-1}\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in[1;2]$

Donc : $S=[1;2]$

6) a) Soit : h une fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=-x+2+2\sqrt{x-1}$

a) Vérifions que : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in[1;+\infty[$

Soit : $x\in[1;+\infty[$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=-(g(x))^2+2g(x)+1=-\left(\sqrt{x-1}\right)^2+2\sqrt{x-1}+1=-x+1+2\sqrt{x-1}+1=-x+2+2\sqrt{x-1}=h(x)$

b) Déduisons les variations de h sur $[1;+\infty[$

→Puisque g est croissante sur $[1;2]$ et $g([1;2])\subset[0;1]$ et f est croissante sur $[0;1]$ alors $\boldsymbol{h}$ est croissante sur $[1;2]$

→Puisque g est croissante sur $[2;+\infty[$ et $g([2;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ et f est décroissante sur $[1;+\infty[$ alors $\boldsymbol{h}$ est décroissante sur $[2;+\infty[$

Le tableau de variation de h :

PROF: ATMANI NAJIB

x	1		2		$+\infty$
$h(x)$		↗	2	↘	

Car : $h(2)=-2+2+2\sqrt{2-1}=2$

c) Soit : $a\in[3;+\infty[$; Montrons que : $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\geq -\frac{1}{2}$

$a\in[3;+\infty[\ \Rightarrow a\geq 3\Rightarrow a-1\geq 2$

On : $a-1\leq a$ et puisque : h est décroissante sur $[2;+\infty[$

Alors : $h(a-1)\geq h(a)$ et $h(x)=-x+2+2\sqrt{x-1}$

Alors : $-a+1+2+2\sqrt{a-1-1}\geq -a+2+2\sqrt{a-1}$

Alors : $2\sqrt{a-2}\geq 2\sqrt{a-1}-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{a-2}-2\sqrt{a-1}\geq -1 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\right)\geq -1$

Alors : $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\geq -\frac{1}{2}$

Exercice16 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$

1) ä) Montrer que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=2+(g(x))^2$ où g est une fonction à déterminer

b) En déduire que : f est minorée sur D_f

c) f admet-elle un minimum absolu ? justifier

d) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et tracer (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Étudier la monotonie de f dans les intervalles suivants : $]-\infty;1[$; $\left]1;\frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

b) Dresser le tableau de variation de f et déterminer les extrémums de la fonction f.

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

1) ä) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$:On a $f(x)=\dfrac{2(x^2-2x+1)+4x^2+12x+9}{(x-1)^2}$

Alors : $f(x)=\dfrac{2(x^2-2x+1)+4x^2+12x+9}{(x-1)^2}=\dfrac{2(x-1)^2+(2x-3)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2}+\dfrac{(2x-3)^2}{(x-1)^2}$

Alors : $f(x)=2+\dfrac{(2x-3)^2}{(x-1)^2}=2+\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)^2$ avec : $g(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

b) Déduisons que : f est minorée sur D_f : Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: Montrons que : $2\leq f(x)$

PROF: ATMANI NAJIB

Puisque : $f(x)=2+\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2$ alors : $f(x)-2=\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : $2\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Par suite f est minorée sur $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

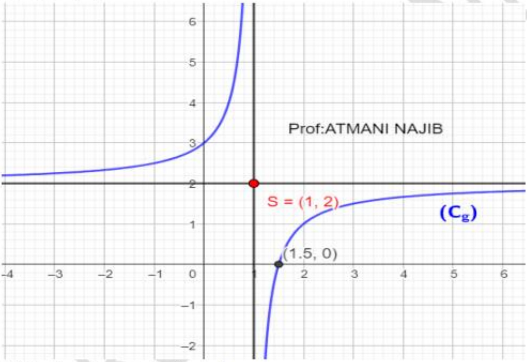
c) Comme : $f(x)-2=0\Leftrightarrow\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

Alors : $f\left(\frac{3}{2}\right)=2$ et donc : $f\left(\frac{3}{2}\right)\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : f admet-elle un minimum absolu c'est 2 en $\frac{3}{2}$

d) $g(x)=\frac{2x-3}{x-1}$; $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$: $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2+3=1>0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $S(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$.



2) Etudions la monotonie de f :

On a : $f(x)=2+\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$ avec : $g(x)=\frac{2x-3}{x-1}$;

On peut vérifier que : $f(x)=(h\circ g)(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$ avec : $h(x)=2+x^2$

Le tableau de variation de h : $h(x)=x^2+2$; $D_h=\mathbb{R}$

On a : $a=1$ et $b=0$ et $c=2$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2\times 1}=0$ Et $\beta=h(0)=2$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_h\right)$ c'est une parabole de sommet $W\left(0;2\right)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	↘	2	↗

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

→Etudions la monotonie de $f=h\circ g$ dans l'intervalle : $\left]-\infty;1\right[$

Puisque g est croissante sur $\left]-\infty;1\right[$ et $\forall x\in\left]-\infty;1\right[:g(x)\in\left]2;+\infty\right[$ (voir $\left(C_g\right)$) et h est croissante sur $\left]2;+\infty\right[$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left]-\infty;1\right[$

→ Etudions la monotonie de $f=h\circ g$ dans l'intervalle : $\left]1;\frac{3}{2}\right]$

Puisque g est croissante sur $\left]1;\frac{3}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]1;\frac{3}{2}\right]:g(x)\in\left]-\infty;0\right]$ (voir $\left(C_g\right)$) et h est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]1;\frac{3}{2}\right]$

→ Etudions la monotonie de $f=h\circ g$ dans l'intervalle : $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

Puisque g est croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $\forall x\in\left[\frac{3}{2};+\infty\right[:g(x)\in\left[0;+\infty\right[$ (voir $\left(C_g\right)$) et h est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

c) le tableau de variation de f et les extrémums de la fonction f

→le tableau de variation de f

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖ ↘	1	↗

→Le nombre 1 est le minimum relatif de f en $\frac{3}{2}$

Exercice17 : Soit f une fonction numérique définie par : $f\left(x\right)=\dfrac{x-E\left(x\right)}{\sqrt{x}}$

1) Calculer : $f\left(4\right)$; $f\left(\dfrac{9}{4}\right)$

2) Déterminer le domaine de définition de f

PROF. ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

3) Montrer que f est bornée

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f\left(x\right)=0$

Solution : $f\left(x\right)=\dfrac{x-E\left(x\right)}{\sqrt{x}}$

1) Calculons : $f\left(4\right)$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$; $f\left(-\dfrac{9}{2}\right)$

$f\left(4\right)=\dfrac{4-E\left(4\right)}{\sqrt{4}}=\dfrac{4-4}{2}=\dfrac{0}{2}=0$ car : $E\left(4\right)=4$

$f\left(\dfrac{9}{4}\right)=\dfrac{\dfrac{9}{4}-E\left(\dfrac{9}{4}\right)}{\sqrt{\dfrac{9}{4}}}=\dfrac{\dfrac{9}{4}-2}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\dfrac{9}{4}-2}{\dfrac{3}{2}}$ car $E\left(\dfrac{9}{4}\right)=2$ en effet : $2\leq\dfrac{9}{4}<2+1$

$f\left(\dfrac{9}{4}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}$

2) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\succ 0\right\}=\mathbb{R}^{*+}$

3)On a : $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\ \ E\left(x\right)\leq x\leq E\left(x\right);\ \Rightarrow 0\leq x-E\left(x\right)\ \Rightarrow\dfrac{x-E\left(x\right)}{\sqrt{x}}\geq 0$ donc : f est minorée

Si : $x\in\left[0;1\right[\Leftrightarrow 0\leq x\prec 1$ Donc : $E\left(x\right)=0$

Donc : $f\left(x\right)=\dfrac{x-0}{\sqrt{x}}=\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\prec 1$ car $x\prec 1$

Si : $x\in\left[1;+\infty\right[\Leftrightarrow 1\leq x\Leftrightarrow 1\leq\sqrt{x}$

On a : $x-1\prec E\left(x\right)\leq x$ Donc : $-1\prec E\left(x\right)-x\leq 0$ Donc : $0\leq x-E\left(x\right)\prec 1$ et $1\leq\sqrt{x}$

Donc : $0\leq x-E\left(x\right)\prec\sqrt{x}$

Donc : $0\leq\dfrac{x-E\left(x\right)}{\sqrt{x}}\prec 1$ si $x\in\left[1;+\infty\right[$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\ \ 0\leq\dfrac{x-E\left(x\right)}{\sqrt{x}}\prec 1$ c'est-à-dire : f est bornée

4) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f\left(x\right)=0$

$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-E\left(x\right)}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow x-E\left(x\right)=0\ et\ x\succ 0\Leftrightarrow E\left(x\right)=x\ \ et\ x\succ 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}\cap\mathbb{R}^{*+}\Leftrightarrow x\in\mathbb{N}^{*}$

D'où : $S=\mathbb{N}^{*}$

Exercice18 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f\left(x\right)=\dfrac{E\left(x\right)-x+1}{x^2-4} & ;\ si\ \ \ x\geq 0 \\ f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1} & ;\ si\ \ \ x\prec 0 \end{cases}$

1) Déterminer : D_f

2) a) Vérifier que : $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2-4}$ si $x\in\left]2;3\right[$

b) Vérifier que : $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2-4}$ si $x\in\left]1;2\right[$

3) Montrer que : $0\prec f(x)\leq\dfrac{1}{x^2-4}$; $\forall x\in\left]2;+\infty\right[$

4) Montrer que : $|f(x)|\leq\dfrac{1}{\sqrt{1-x}-1}$; $\forall x\in\left]-\infty;0\right[$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\text{ et }x^2-4\neq0\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec0\text{ et }1-x\geq0\text{ et }\sqrt{1-x}-1\neq0\right\}$

On a : $x^2-4=0\Leftrightarrow\cancel{x=-2}\text{ ou }x=2$

On a : $\sqrt{1-x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow1-x=1\Leftrightarrow x=0$

On a : $1-x\geq0\Leftrightarrow x\leq1$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\text{ et }x\neq2\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec0\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

2) a) Vérifions que : $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2-4}$ si $x\in\left]2;3\right[$

Si $x\in\left]2;3\right[$ alors : $E(x)=2\Rightarrow f(x)=\dfrac{E(x)-x+1}{x^2-4}=\dfrac{2-x+1}{x^2-4}=\dfrac{3-x}{x^2-4}$

b) Vérifions que : $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2-4}$ si $x\in\left]1;2\right[$

Si $x\in\left]1;2\right[$ alors : $E(x)=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{E(x)-x+1}{x^2-4}=\dfrac{1-x+1}{x^2-4}=\dfrac{2-x}{x^2-4}$

3) Montrons que : $0\prec f(x)\leq\dfrac{1}{x^2-4}$; $\forall x\in\left]2;+\infty\right[$

Soit : $x\in\left]2;+\infty\right[$

On a: $\forall x\in\left]2;+\infty\right[\ f(x)=\dfrac{E(x)-x+1}{x^2-4}$ et on a: $x-1\prec E(x)\leq x$

Donc : $-1\prec E(x)-x\leq0$ et $0\prec E(x)-x+1\leq1$ et on a : $x\succ2\Rightarrow x^2-4\succ0$

Donc : $0\prec\dfrac{E(x)-x+1}{x^2-4}\leq\dfrac{1}{x^2-4}$ c'est-à-dire : $0\prec f(x)\leq\dfrac{1}{x^2-4}$; $\forall x\in\left]2;+\infty\right[$

4) Si : $x\in\left]-\infty;0\right[$; $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}$

Donc : $|f(x)|=\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}\right|=|\sin x|\dfrac{1}{\left|\sqrt{1-x}-1\right|}$

PROF: ATMANI NAJIB

or on a : $x \prec 0 \Rightarrow -x \succ 0 \Rightarrow 1-x \succ 1 \Rightarrow \sqrt{1-x} \succ 1 \Rightarrow \sqrt{1-x}-1 \succ 0$ et $|\sin x| \leq 1$

Donc : $|f(x)| = |\sin x| \frac{1}{\sqrt{1-x}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}-1}$ Si : $x \in]-\infty;0[$

Exercice19 : Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = E(x) + E(-x)$

1) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

2) Simplifier l'expression de : $f(x)$ sur l'intervalles : $I_1 = [0;1[$

3) En déduire l'expression de : $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

4) En déduire que si : p et q deux entiers naturels premier entre eux alors :

$$\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{kp}{q}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Solution : 1) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

- $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x+1 \in \mathbb{R}$ et $x-1 \in \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x+1) = E(x+1) + E(-x-1) = E(x)+1+E(-x)-1 = E(x)+E(-x) = f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

2) L'expression de : $f(x)$ sur l'intervalles : $I_1 = [0;1[$

Si $x \in]0;1[\Leftrightarrow 0 \prec x \prec 1$ alors : $E(x) = 0$

$0 \prec x \prec 1 \Leftrightarrow -1 \prec x \prec 0$ Donc : $-1 \prec x \leq -1+1$ alors : $E(-x) = 0$

Donc : $f(x) = 0 + -1 = -1$

Si $x = 0$ alors : $f(0) = E(0) + E(-0) = 0+0 = 0$ $E(x) = 0$

D'après ce qui précède : $\begin{cases} f(x) = -1 & si \quad 0 \prec x \prec 1 \\ f(x) = 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

2) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors :

$$\begin{cases} f(x) = -1 & si \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ f(x) = 0 & si \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4) En déduire que si : $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ et $p \wedge q = 1$ alors : $\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{kp}{q}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$

On pose : $k' = q - k$ si $k = 1$ alors : $k' = q-1$ et si $k = q-1$ alors : $k' = 1$

Alors : $\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{kp}{q}\right) = \sum_{k'=q-1}^{1} E\left(\frac{(q-k')p}{q}\right) = \sum_{k'=q-1}^{1} E\left(\frac{qp-k'p}{q}\right) = \sum_{k'=q-1}^{1} E\left(\frac{qp}{q} - \frac{k'p}{q}\right)$

$= \sum_{k'=q-1}^{1} E\left(p - k'\frac{p}{q}\right) = \sum_{k'=q-1}^{1} \left(p + E\left(-k'\frac{p}{q}\right)\right)$

On a : $k' \prec q$ car $k' \in \{1;2;...;q-1\}$ et $p \wedge q = 1$ donc : $k'\frac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$

PROF: ATMANI NAJIB

Alors : $\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{k\,p}{q}\right) = \sum_{k=1}^{k=q-1} p + \sum_{k=1}^{k=q-1} E\left(-k\frac{p}{q}\right) = p(q-1) + \sum_{1}^{k=q-1}\left(-1-E\left(k\frac{p}{q}\right)\right)$

Alors : $\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{k\,p}{q}\right) = p+(-1)(q-1) = p(q-1)+(-1)(q-1)-\sum_{1}^{q-1}\left(E\left(k\frac{p}{q}\right)\right)$

Donc : $\sum_{1}^{q-1} E\left(\frac{k\,p}{q}\right) = (q-1)(p-1)-\sum_{1}^{q-1}\left(E\left(\frac{kp}{q}\right)\right)$

Par suite : $2\sum_{1}^{q-1} E\left(\frac{k\,p}{q}\right) = (q-1)(p-1)$

Finalement : $\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{k\,p}{q}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$

Exercice20 : Soit la fonction f_n définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\forall x\in\mathbb{R}\ : f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)-E(nx)$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\forall x\in\mathbb{R}\quad f_n\left(x+\frac{1}{n}\right)=f_n(x)$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \forall x\in\left[0;\frac{1}{n}\right[\ ;\ f_n(x)=0$

3) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\forall x\in\mathbb{R}\ :\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx)$

Solution : 1) Soient : $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$

$$f_n\left(x+\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{1}{n}+\frac{k}{n}\right)-E\left(n\left(x+\frac{1}{n}\right)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k+1}{n}\right)-E(nx+1)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k+1}{n}\right)-E(nx)-1$$

On pose : $i=k+1$ (changement d'indice)

$$f_n\left(x+\frac{1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}E\left(x+\frac{i}{n}\right)-E(nx)-1=\sum_{i=0}^{n-1}E\left(x+\frac{i}{n}\right)-E(nx)-1-E\left(x+\frac{0}{n}\right)+E\left(x+\frac{n}{n}\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}E\left(x+\frac{i}{n}\right)-E(nx)-1-E(x)+E(x+1)=\sum_{i=0}^{n-1}E\left(x+\frac{i}{n}\right)-E(nx)-1-E(x)+E(x)+1$$

Donc : $f_n\left(x+\frac{1}{n}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}E\left(x+\frac{i}{n}\right)-E(nx)$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\forall x\in\mathbb{R}\quad f_n\left(x+\frac{1}{n}\right)=f_n(x)$

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \forall x\in\left[0;\frac{1}{n}\right[\ ;\ f_n(x)=0$

Soient : $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\left[0;\frac{1}{n}\right[$

On a : $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)-E(nx)$ et $0\le x\prec\frac{1}{n}\Rightarrow 0\le nx\prec 1\Rightarrow E(nx)=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Et on a : $0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow 0 \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n}$ et $0 \leq x \prec \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq x+\frac{k}{n} \prec \frac{n-1}{n}+\frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq x+\frac{k}{n} \prec 1 \Rightarrow E\left(x+\frac{k}{n}\right)=0$

Donc : $f_n(x)=0-0=0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \forall x \in \left[0;\frac{1}{n}\right[\; ; \; f_n(x)=0$ par suite : $f_n=0$ sur $\left[0;\frac{1}{n}\right[$

3) Déduction que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \forall x \in \mathbb{R} \; : \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx)$

Et puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \forall x \in \mathbb{R} \quad x+\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ et $f_n\left(x+\frac{1}{n}\right)=f_n(x)$

Alors : f est une fonction périodique de période $T=\frac{1}{n}$

On a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \forall x \in \left[0;\frac{1}{n}\right[\; ; \; f_n(x)=0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f_n(x)=0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \forall x \in \mathbb{R} \; ; \; \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right)-E(nx)=0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \forall x \in \mathbb{R} \; ; \; \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicie

PROF: ATMANI NAJIB