http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences math BIOF

Correction série N°12 : Généralités sur les fonctions

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=3x^2-x+1$. 2) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$. 3) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

4) $f(x)=(3x^2+2)\sqrt{-\frac{1}{2}x^2+x-4}$ 5) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x^2}}$ 6) $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-x}$.

7) $f(x)=\frac{2\sin x+\cos x}{|x^2-4x+5|-1}$ 8) $f(x)=\frac{8\sin 3x+\cos 3x}{2\cos x-\sqrt{3}}$ 9) $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$

Solution : 1) $f(x)=3x^2-x+1$ f est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0\Leftrightarrow x(x^2-2)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-2=0$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ ou $x^2=2$

$\Leftrightarrow$ $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

3) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -6 \Leftrightarrow x\leq\frac{-6}{-3} \Leftrightarrow x\leq 2$

Donc : $D_f=]-\infty;2]$

4) $f(x)=(3x^2+2)\sqrt{-\frac{1}{2}x^2+x-4}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{2}x^2+x-4\geq 0\right\}$

$-\frac{1}{2}x^2+x-4$: Calculons son discriminant : $a=-\frac{1}{2}$; $b=1$; $c=-4$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times(-4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1-8=-7<0$ et $a=-\frac{1}{2}<0$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$ $+\infty$
$-\frac{1}{2}x^2+x-4$	$-$

Donc : $D_f=\varnothing$

5) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x^2}}$

PROF: ATMANI NAJIB

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{x^2+1}{1-x^2}\geq 0\ \ et\ \ 1-x^2\neq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{x^2+1}{1-x^2}\geq 0\ \ et\ \ x^2\neq 1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{x^2+1}{1-x^2}\geq 0\ \ et\ \ x\neq 1\ et\ \ x\neq -1\right\}$

Déterminons le signe de l'expression suivante : $F(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$

Le numérateur est positif pour tout x, et le dénominateur est un trinôme du second degré de racines −1 et 1, on peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2+1		$+$		$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

Donc : $D_f=\left]-1,1\right[$

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-x}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x-2\geq 0\ \ et\ x^2-x\neq 0\right\}$

$x-2\geq 0$ Signifie : $x\geq 2$ et $x^2-x\neq 0$

Signifie : $x(x-1)\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 0$ et $x\neq 1$

Donc : $D_f=\left[2,+\infty\right[-\{0;1\}=\left[2,+\infty\right[$

7) $f(x)=\dfrac{2\sin x+\cos x}{\left|x^2-4x+5\right|-1}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\left|x^2-4x+5\right|-1\neq 0\right\}$

$\left|x^2-4x+5\right|-1=0$ Signifie que : $\left|x^2-4x+5\right|=1$

Signifie que : $x^2-4x+5=1$ ou $x^2-4x+5=-1$

• Résolution de $x^2-4x+5=1$

$x^2-4x+5=1$ Signifie que : $x^2-4x+4=0$

Signifie que : $(x-2)^2=0$

Signifie que : $x-2=0$

Signifie que : $x=2$

La seule solution de $x^2-4x+5=1$ est 2.

• Résolution de $x^2-4x+5=-1$.

$x^2-4x+5=-1$ Signifie que : $x^2-4x+6=0$

On calcule son discriminant : $\Delta=-8$.

Ainsi l'équation $x^2-4x+6=0$ n'a aucune solution réelle

Au final, seule solution : $x=2$

D'où : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq 2\right\}=\mathbb{R}-\{2\}$

8) $f(x)=\dfrac{8\sin 3x+\cos 3x}{2\cos x-\sqrt{3}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-\sqrt{3}\neq 0\right\}$

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\quad et\quad 2\cos x-\sqrt{3}\neq 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\quad et\quad \cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\quad et\quad \sin x\neq\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

PROF: ATMANI NAJIB

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad et \quad x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad et \quad x \neq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ Avec : $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

9) $f(x) = \sqrt{|x+9| - 3}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x+9| - 3 \geq 0 \}$

$|x+9| - 3 \geq 0$ Signifie que : $|x+9| \geq 3$ Signifie que : $x + 9 \geq 3$ ou $x + 9 \leq -3$

Signifie que : $x \geq -6$ ou $x \leq -12$

Donc : $D_f =]-\infty ; -12] \cup [-6 ; +\infty[$

Exercice2 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x - 3} & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2 \sin x}{x^2 + x - 2} & si \quad x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) Calculer : $f(\pi)$; $f(0)$; $f(-1)$

Solution : 1) $D_f = \{ x \in \mathbb{R}^- \,/\, x - 3 \neq 0 \} \cup \{ x \in \mathbb{R}^{+*} \,/\, x^2 + x - 2 \neq 0 \}$

$x^2 + x - 2$: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

Donc : $D_f = \{ x \in \mathbb{R}^- \,/\, x \neq 3 \} \cup \{ x \in \mathbb{R}^{+*} \,/\, x \neq 1 \ et \ x \neq -2 \}$

Donc : $D_f =]-\infty ; 0] \cup]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

Par suite : $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2) Calcul de : $f(\pi)$: On a : $\pi > 0$

Donc : $f(\pi) = \frac{\pi^2 \sin \pi}{\pi^2 + \pi - 2} = \frac{0}{\pi^2 + \pi - 2} = 0$

Calcul de $f(0)$: On a : $0 \leq 0$ donc : $f(0) = \frac{0^3 + 0 + 1}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$

Calcul de $f(-1)$: On a : $-1 \leq 0$

Donc : $f(-1) = \frac{(-1)^3 + (-1) + 1}{(-1) - 3} = \frac{1}{4}$

Exercice3 : Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^{2025} + bx^{2023} + cx + 3$

Si on sait que : $f(-3) = 2$ calculer : $f(3)$

Solution : On a : $f(x) = ax^{2025} + bx^{2023} + cx + 3$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $f(-x)=a(-x)^{2025}+b(-x)^{2023}+c(-x)+3$

Donc : $f(-x)=-ax^{2025}-bx^{2023}-cx+3$

Donc : $f(x)+f(-x)=6$ et comme : $f(-3)=2$

Donc : $f(-3)+f(3)=6$ et comme : $f(-3)=2$

Donc : $f(3)=6-f(-3)=6-2=\boxed{4}$

Exercice4 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=7-x^2$ 2) $f(x)=\frac{3}{x}$ 3) $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$

Solution :1) f est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=7-(-x)^2=7-x^2$
  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

2) $f(x)=\frac{3}{x}$; on a $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\neq 0$ Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\frac{3}{-x}=-\frac{3}{x}$
  $f(-x)=-f(x)$

Donc : f est une fonction impaire

3) $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$

On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}^*=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[=\mathbb{R}-\{0\}$

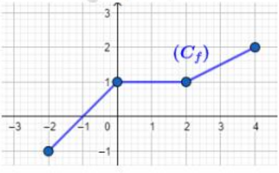
On va donc montrer que f n'est ni paire ni impaire.

Calculons par exemple $f(1)$ et $f(-1)$

$f(1)=1+\frac{1}{1^2}=1+1=2$ et $f(-1)=-1+\frac{1}{(-1)^2}=-1+1=0$ donc : $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

Par suite : f n'est ni paire ni impaire.

Exercice5 : La figure ci-dessous représente la représentation graphique d'une fonction f Sur l'intervalle : $[-2,4]$



PROF: ATMANI NAJIB

1) Déterminer les images des nombres **: -2 ; -1 ;0 ; 2 ; 4** par la fonction f

2) Déterminer : $f(x)$ en fonction de x sur $[-2,4]$

Solution :1) $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$ et $f(0)=1$ et $f(2)=1$ et $f(4)=2$

2) On remarque que la représentation graphique de la fonction f est un segment sur chacun des intervalles : $[-2,0]$ et $[0,2]$ et $[2,4]$

Donc la fonction f est affine sur ces intervalles

- Sur l'intervalle $[-2,0]$ on a : $f(x)=a_1x+b_1$
- Et on a : $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$

Donc : $\begin{cases}-2a_1+b_1=-1\\-a_1+b_1=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}-a_1=-1\\b_1=a_1\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}a_1=1\\b_1=1\end{cases}$ Par suite : $f(x)=x+1$

- Sur l'intervalle $[0,2]$ on a : $f(x)=1$
- Sur l'intervalle $[2,4]$ on a : $f(x)=a_2x+b_2$
- Et on a : $f(2)=1$ et $f(4)=2$

Donc : $\begin{cases}2a_2+b_2=1\\4a_2+b_2=2\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}2a_2=1\\b_2=2-4a_2\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}a_2=\dfrac{1}{2}\\b_2=2-2=0\end{cases}$ Par suite : $f(x)=\frac{1}{2}x$

Par conséquent : $\begin{cases}f(x)=x+1 & si\quad x\in[-2,0]\\f(x)=1 & si\quad x\in[0,2]\\f(x)=\dfrac{1}{2}x & si\quad x\in[2,4]\end{cases}$

Exercice6 : Soient les fonctions : $\begin{aligned}f:\{-1;0\}&\to\mathbb{R}\\x&\mapsto 1+x\end{aligned}$; $\begin{aligned}g:\{-1;0\}&\to\mathbb{R}\\x&\mapsto\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$; $\begin{aligned}h:\{-1;0\}&\to\mathbb{R}\\x&\mapsto -1+\sqrt{4+2x-x^2}\end{aligned}$

Comparer les fonctions f ; g et h

Solution : On a : $D_f=D_g=D_h=\{-1;0\}$

Et On a : $f(-1)=g(-1)=h(-1)=0$ et $f(0)=g(0)=h(0)=1$

Donc : $f=g=h$

Exercice7 : Soit les fonctions f et g définies par : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$

On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)$

1) Déterminer D_h

2) Déterminer : $h(x)$ $\forall x\in D_{g\circ f}$

3) Soit la fonction k définie par : $k(x)=\dfrac{1}{4x-3}$

Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-3\}$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF. ATMANI NAJIB

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_f\ \ et\ \ f(x)\in D_g\right\}$

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq 1\ et\ f(x)\neq -3\right\}$

$f(x)=-3\Leftrightarrow \frac{x}{x-1}=-3\Leftrightarrow -3(x-1)=x\Leftrightarrow -3x+3=x\Leftrightarrow -4x=-3\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

Donc : $D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq 1\ et\ x\neq\frac{3}{4}\right\}$

Donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{4};1\right\}$

2)Soit $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{4};1\right\}$: $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$h(x)=\frac{\frac{x}{x-1}-1}{\frac{x}{x-1}+3}=\frac{\frac{x-x+1}{x-1}}{\frac{x+3x-3}{x-1}}=\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{4x-3}{x-1}}=\frac{1}{4x-3}$$

Donc : $h(x)=\frac{1}{4x-3}$: $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{4};1\right\}$

3)Les fonctions h et k ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$D_h=D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{4};1\right\}$ et $D_k=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{4}\right\}$

Exercice8 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{\sin 2x\cos 2x}{2\cos 2x-1}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Vérifier que f est périodique et π est une période de f

3) En déduire un domaine d'étude de f : D_E

Solution : 1) →Déterminons D_f et étudions la parité de f

$f(x)=\frac{\sin 2x\cos 2x}{2\cos 2x-1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2\cos 2x-1\neq 0\right\}$

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ 2\cos 2x-1\neq 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \cos 2x\neq\frac{1}{2}$

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \cos 2x\neq\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ 2x\neq-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \ et\ \ 2x\neq\frac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \cos 2x\neq\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ x\neq-\frac{\pi}{6}+k\pi\ \ et\ \ x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

→Etudions la parité de f

☺$x\in D_f\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ x\neq-\frac{\pi}{6}+k\pi\ et\ \ x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow -x \in \mathbb{R}\ et\ -x \neq \frac{\pi}{6}+k\pi\ et\ -x \neq -\frac{\pi}{6}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\} \Rightarrow -x \in D_f$

☺ $f(-x)=\frac{\sin(-2x)\cos(-2x)}{2\cos(-2x)-1}=-\frac{\sin 2x\cos 2x}{2\cos 2x-1}=-f(x)$

Donc : f une fonction impaire

2) Vérifions que f est périodique et π est une période de f

Soit $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$: $f(x+\pi)=\frac{\sin(2x+2\pi)\cos(2x+2\pi)}{2\cos(2x+2\pi)-1}=\frac{\sin 2x\cos 2x}{2\cos 2x-1}=f(x)$

Car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π et que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Donc : f est périodique et π est une période de f

3) Déduisons un domaine d'étude de f : D_E

Comme : f une fonction périodique et π est une période de f et paire on choisit un intervalle d'étude :

$D_E=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cap D_f=\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice9 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=3$

Tel que : $f(x)=|x-2| \quad \forall x\in[0;3[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;9[$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

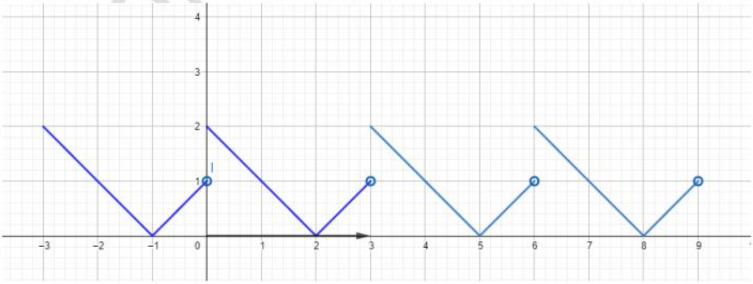
2) Calculer : $f(9,78)$; $f(-8,75)$; $f(2023)$

3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[3k;3(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0=[0;3[$:

$$\begin{cases} f(x)=x-2 & si\ x\in[2;3[\\ f(x)=-x+2 & si\ x\in[0;2] \end{cases}$$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;9[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;3[$ et utiliser les translation $3k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



PROF: ATMANI NAJIB

2) →Calculons : $f(9,78)$

$f(9,78)=f(9+0,78)=f(3\times 3+0,78)=f(0,78)$ car f est une fonction périodique de période $T=3$

Et puisque : $0,78\in[0;3[$ alors : $f(9,78)=f(0,78)=|0,78-2|=1,22$

→Calculons : $f(-8,75)$

$f(-8,75)=f(-9,75+1)=f(-9-0,75+1)=f(-3\times 3+0,25)=f(0,25)$ car f est une fonction périodique de période $T=3$

Et puisque : $0,25\in[0;3[$ alors : $f(-8,75)=f(0,25)=|0,25-2|=1,75$

→Calculons : $f(-8,75)$

$f(2023)=f(3\times 674+1)=f(1)$ car f est une fonction périodique de période $T=3$

Et puisque : $1\in[0;3[$ alors : $f(2023)=f(1)=|1-2|=1$

3) l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[3k;3(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[3k;3(k+1)[\Leftrightarrow 3k\le x\prec 3(k+1)$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\le x-3k\prec 3\Leftrightarrow f(x-3k)=f(x)$

$x\in I_k\Leftrightarrow f(x)=|x-3k-2|\ \ k\le\dfrac{x}{2}\prec k+1$

Avec : $3k\le x\prec 3(k+1)\Leftrightarrow k\le\dfrac{x}{3}<k+1\Leftrightarrow E\left(\dfrac{x}{3}\right)=k$

Exercice10 : Etudier les variations des fonctions définies par : 1) $f(x)=-2x-100$ 2) $g(x)=\dfrac{-4}{x}$

3) $h(x)=-2x^3+2027$ 4) $k(x)=2001\sqrt{x-2}+2024$

Solution : 1) $f(x)=-2x-100$

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $v:x\rightarrow x$

On sait que la fonction $v:x\rightarrow x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $-2<0$ donc la fonction $-2v$ est aussi décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f=-2v+(-100)$ aussi décroissante sur $\mathbb{R}$

2) $g(x)=\dfrac{-4}{x}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$

On sait que : $v:x\rightarrow\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $g=-4v$

Alors : g est croissante sur $]0;+\infty[$ et est croissante sur $]-\infty;0[$ car $-4<0$

3) $h(x)=-2x^3+2027$ et $D_f=\mathbb{R}$: On sait que : $v:x\rightarrow x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$

On a : $h=-2v+2027$

Puisque la fonction v est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $-2v$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $h=-2v+2027$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $-2<0$

PROF: ATMANI NAJIB

4) $k(x)=2001\sqrt{x-2}+2024$: $D_k=[2;+\infty[$

Puisque la fonction $v:x\to\sqrt{x-2}$ est croissante sur $[2;+\infty[$

Donc : $k=2001v+2024$ est croissante sur $[2;+\infty[$ car $2001>0$

Exercice11 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

A) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

B) On considère la fonction numérique g tel que : $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3$ et (C_g) sa courbe représentative

1) Etudier la parité de g
2) Que peut-on dire de la fonction f et de g sur $\mathbb{R}^+$
3) Dresser le Tableau de variations de g
4) Tracer les courbes représentative (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $g(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : A) On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$: f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=\frac{1}{2}$; $b=-2$ et $c=3$

Donc : $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)}=2$ et $f(2)=\frac{1}{2}\times(2)^2-2\times2+3=2-4+3=1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(2;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=2$

Comme : $\boxed{a=4>0}$ alors :

La fonction f est croissante sur $[2;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;2]$

Tableau de variations de f : On a $a=\frac{1}{2}>0$ donc :

Tableau de variations de f : On a $a=\frac{1}{2}>0$ donc :

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f(x)$	↘ 1 ↗

B) $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Etudions la parité de g

a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$

b) $g(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 - 2|-x| + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 2|x| + 3 = g(x)$

Donc : g est une fonction paire

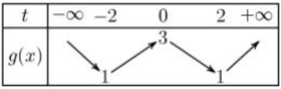
Graphiquement (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2|x| + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = f(x)$ car $|x| = x$

Résultat : (C_g) et (C_f) coïncident sur $\mathbb{R}^+$

3) Tableau de variations de g :

Du Tableau de variations de f et puisque g est paire on déduit le Tableau de variations de g :



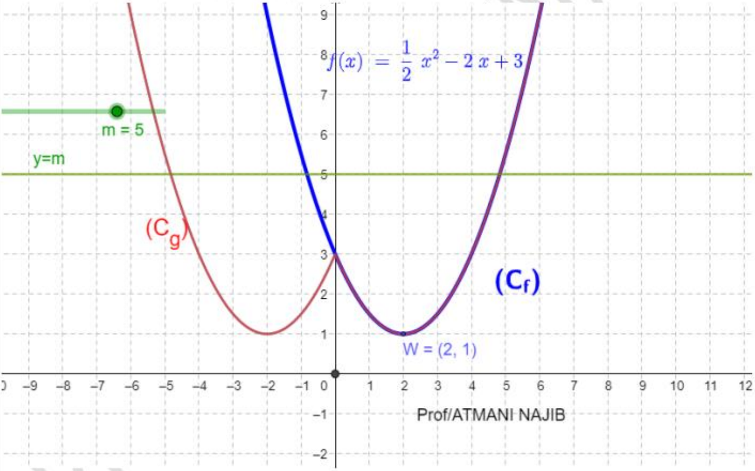
t	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g(x)$		↘	1	↗	3	↘	1	↗	

$g(0) = 3$ et $g(-2) = 1$ et $g(2) = 1$

Puisque (C_g) et (C_f) coïncident sur $\mathbb{R}^+$ et (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

4)Alors on peut construire (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

NAJIB



5) Résolution graphique de l'équation $m = g(x)$ avec $m \in \mathbb{R}$:

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $y = m$

Si: $m<1$ il y'a pas de solution

Si: $m=1$ il y'a deux solutions : 2 et -2

Si: $1<m<3$ il y'a une 4 solutions

Si: $m=3$ il y'a trois solutions : 4 ;0 ;-4

Si: $m>3$ il y'a deux solutions

Exercice12 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{x-1}$;(C_f) Sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ 1) Déterminer D_f

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que $x_1 \neq x_2$

3) Dresser son tableau de variation de f

4)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques

5 Tracer la courbe (C_f)

6) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{x}{|x|-1}$ a) Déterminer D_g

b) Montrer que : g est impaire

c) Montrer que : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in D_f \cap \mathbb{R}^+$

d) En déduire une méthode pour tracer la courbe (C_g) de fonction g et tracer (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

e) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-m|x|+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=\frac{x}{x-1}$

1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Soient $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tel que : $x_1\neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1-1}-\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{x_1(x_2-1)-x_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1x_2-x_1-x_1x_2+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-x_1+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

3) Tableau de variation :

a) sur $]1;+\infty[$ soient $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\succ 1$ et $x_2\succ 1$ Donc $x_1-1\succ 0$ et $x_2-1\succ 0$ Donc $(x_1-1)(x_2-1)\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}\leq 0$ sur $]1;+\infty[$

PROF. ATMANI NAJIB

D'où f est décroissante sur $]1;+\infty[$

b) Sur $]-\infty;1[$ soient $x_1 \in]-\infty;1[$ et $x_2 \in]-\infty;1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \prec 1$ et $x_2 \prec 1$ Donc $x_1 - 1 \prec 0$ et $x_2 - 1 \prec 0$ Donc $(x_1-1)(x_2-1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = \frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)} \leq 0$ sur $]-\infty;1[$ D'où f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$

Résumé : tableau de variation :

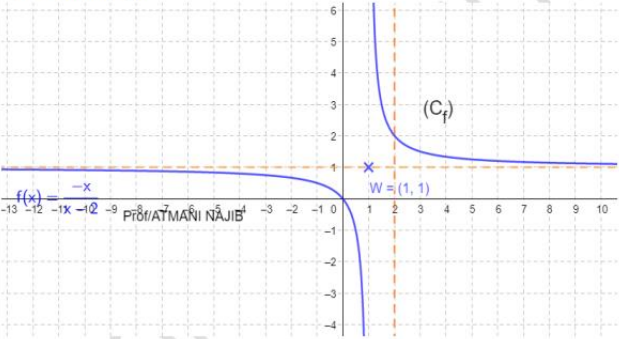
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

4)Déterminons la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques on utilisant un résumé de notre cours :

Si : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $c \neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $W\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x) = \frac{x}{x-1}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $W\left(\frac{1}{1};\frac{1}{1}\right)$ c'est à dire : $W(1;1)$ d'asymptotes les droites d'équations : $x = \frac{1}{1} = 1$ et $y = \frac{1}{1} = 1$

5) La courbe (C_f) :



6) Soit g une fonction tel que : $g(x) = \frac{x}{|x|-1}$

On a $g(x) \in \mathbb{R}$ signifie $|x| - 1 \neq 0$

Signifie $|x| \neq 1$ c'est-à-dire : $x \neq 1$ et $x \neq -1$

Par suite : $D_g = \mathbb{R} - \{-1;1\}$

b) Montrons que g est impaire :

☞ $x \in D_g = \mathbb{R} - \{-1;1\}$ Signifie $x \neq 1$ et $x \neq -1$

Signifie $-x \neq -1$ et $-x \neq -(-1)$

Signifie $-x \neq -1$ et $-x \neq 1$

Signifie $-x \in D_g = \mathbb{R} - \{-1;1\}$

☞ $g(-x) = \frac{-x}{|-x|-1} = \frac{-x}{|x|-1}$ car $|-x| = |x|$

Donc : $g(-x) = -\frac{x}{|x|-1} = -g(x)$ par suite : g est impaire

c) Montrons que : $g(x) = f(x)$ Pour tout $x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$

Soit : $x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$ donc : $x \geq 0$

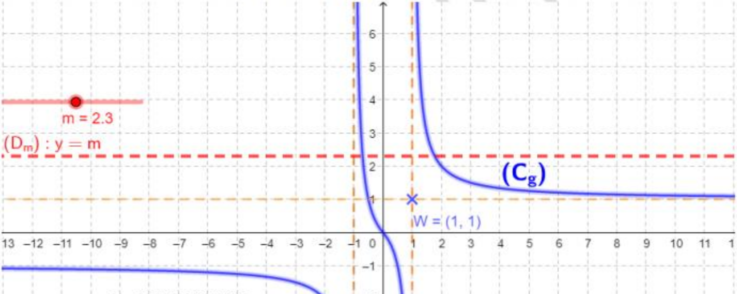
Donc : $|x| = x$ par suite : $g(x) = \frac{x}{|x|-1} = \frac{x}{x-1} = f(x)$

d) On a : $g(x) = f(x)$ Pour tout $x \in [0;1[\cup]1;+\infty[$

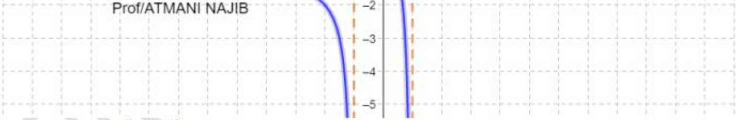
Donc : $(C_g) = (C_f)$ sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$

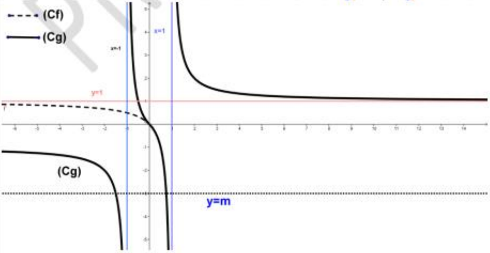
Et puisque g est impaire alors il suffit de tracer son symétrique par rapport au centre du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

d) La courbe représentative de (C_f) et de (C_g) :



NAJIB





e) Déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-m|x|+m=0$ avec $m\in\mathbb{R}$

$x-m|x|+m=0$ Signifie $x=m|x|-m$

Signifie $x=m(|x|-1)$

Signifie $m=\frac{x}{|x|-1}=g(x)$

Signifie $g(x)=m$

Donc : le nombre de solutions de l'équation est le nombre de points d'intersections de (C_g) et la droite : $y=m$

Si : $-1\leq m\leq 1$ il y'a une seule solution

Si : $m\succ 1$ ou $m\prec 1$ il y'a deux solutions

Exercice13 : Soient f et g les deux fonctions définies par :

$f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

3)a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

5)a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

ATMANI NAJIB

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

Solution : 1) On a : $f(x) = -x^2 - 2x + 3$: f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

$(f(x) = ax^2 + bx + c)$ On a : $a = -1$; $b = -2$ et $c = 3$

Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times(-1)} = -1$ et $f(\alpha) = f(-1) = -(-1)^2 - 2\times(-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha; f(\alpha))$ c'est à dire : $W(-1;4)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$. C'est-à-dire : $x = -1$

Comme : $\boxed{a = -1 < 0}$ alors :

La fonction f est décroissante sur $[-1;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;-1]$

Tableau de variations de f : On a $a = -1 < 0$ donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	↗	4	↘

2) $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x + 2 = 0$ soit $x = -2$

Donc : $D_g = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

On utilisant un résumé de notre cours :

Si : $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $c \neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

1iér cas : si $\mathrm{Det}(g) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\mathrm{Det}(g) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$ Avec : $a = 1$; $b = -1$; $c = 1$; $d = 2$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x = -\frac{2}{1} = -2$ et $y = \frac{1}{1} = 1$

$\mathrm{Det}(g) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 1 - (-1)\times 1 = 3 > 0$

Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$

Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

3)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+11=16>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\dfrac{2+4}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3$ et $x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3;0)$ et $B(1;0)$

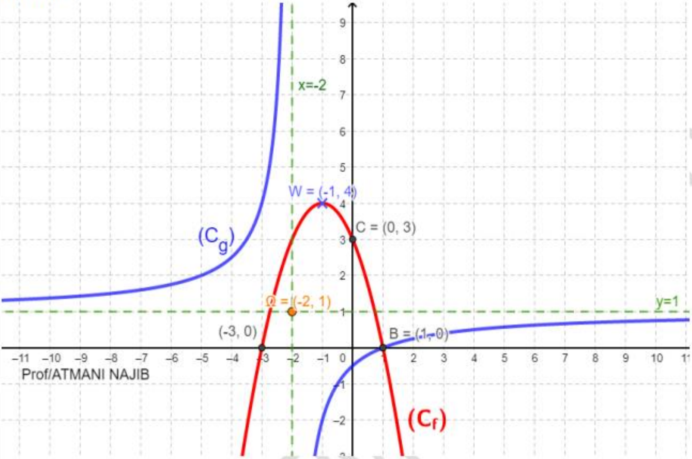
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

4)Représentation graphique :

Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



5) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$:

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-2;1\right]$ Donc $S=\left]-2;1\right]$

Exercice14 : Soit la fonction h définie sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $h(x)=\sqrt{4x^2-1}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.

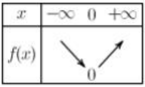
2) Déterminer les variations de h sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Solution :1) La fonction h se décompose de cette façon : $h=g\circ f$

On a alors : $f(x)=4x^2$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

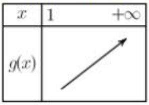
2) a) $f(x)=4x^2$: $D_f=\mathbb{R}$

Le tableau de variation de f :



b) $g(x)=\sqrt{x-1}$: $D_g=\left[1;+\infty\right[$

Le tableau de variation de g :



c)On a : ⇨ f est croissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et on a : $f\left(\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\right)\subset\left[1;+\infty\right[$ et effet :

$x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\Rightarrow x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow x^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow 4x^2\geq 1\Rightarrow f(x)\geq 1\Rightarrow f(x)\in\left[1;+\infty\right[$

On a aussi : g est croissante sur $\left[1;+\infty\right[$

Donc : La fonction h croissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice15 : Soient f et g les deux fonctions définies par :

$g(x)=\frac{x+4}{x+2}$ et $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$ avec (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un

PROF: ATMANI NAJIB

repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g et déterminer la nature de (C_f) et (C_g) en déterminant les éléments caractéristiques

2) Trouver les points d'intersections de la courbe (C_g) avec les axes du repère

3) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}-\{-2\}\quad f(x)=g(x) \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0$

b) Déduire les points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

c)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Résoudre graphiquement l'inéquation : $(x-1)^2 \geq \dfrac{4}{x+2}$

4) Soit F la fonction définie par : $F(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x-3}$

a) Déterminer le domaine de la fonction F et vérifier que : $F(x)=(f\circ h)(x)$ avec : $h(x)=\sqrt{x-3}$

b) Etudier les variations de : F sur $[4,+\infty[$

Solution : $g(x)=\dfrac{x+4}{x+2}$ et $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$

1)a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$; f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=\frac{1}{2}>0$ et $b=-1$ et $c=\frac{3}{2}$ donc : $\alpha=-\dfrac{-(-1)}{2\frac{1}{2}}=1$ $f(1)=1$

La courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$; $S(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$ C'est-à-dire : $x=1$

Tableau de variations de f : On a $a=\frac{1}{2}>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

b) $g(x)=\dfrac{x+4}{x+2}$: on a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$ $\quad \Delta=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2<0$

(C_g) Est l'hyperbole de centre $W(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-2$ et $y=1$.

Donc le tableau de variations de g

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$ -2 $+\infty$	
$g(x)$	↘	↘

2) Déterminons les points d'intersections de la courbe (C_g) avec les axes du repère

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$: $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

Donc : la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses en $A(-4;0)$

On a : $g(0) = \dfrac{0+4}{0+2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Donc : la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées en $B(0;2)$

3) a) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{3}{2} = \dfrac{x+4}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+3}{2} - \dfrac{x+4}{x+2} = 0$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{3}{2} = \dfrac{x+4}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)(x^2-2x+3) - 2(x+4)}{2(x+2)} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x + 2x^2 - 4x + 6 - 2x - 8 = 0$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$

La division euclidienne de $x^3 - 3x - 2$ par $x - 2$ donne : $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0$

---

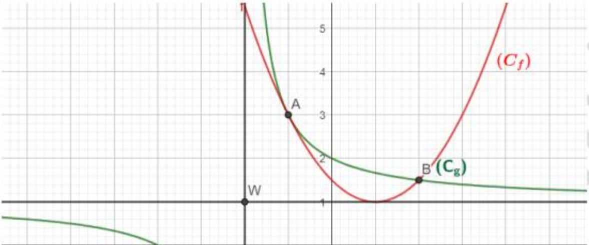
b) Déduisons les points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

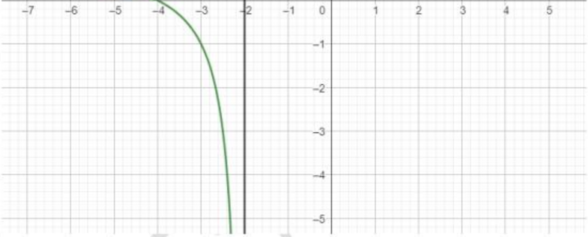
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$ *ou* $x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x = 2$

(C_f) et (C_g) se coupent en : $A(-1;3)$ et $B\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$ car $f(-1) = 3$ et $f(2) = \dfrac{3}{2}$

Donc : $(C_f) \cap (C_g) = \{A;B\}$

c) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$





3) Résoudre graphiquement l'inéquation : $(x-1)^2 \geq \frac{4}{x+2}$

Soit $x \in \mathbb{R}-\{-2\}$: $(x-1)^2 \geq \frac{4}{x+2} \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq \frac{4}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \geq \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}+1 \geq \frac{2}{x+2}+1$

$(x-1)^2 \geq \frac{4}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2} \geq \frac{2+x+2}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2} \geq \frac{x+4}{x+2} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in [2;+\infty[$

Donc : $S=[2;+\infty[$

4) Soit F la fonction définie par : $F(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x-3}$

a) Déterminons le domaine de la fonction F et vérifions que : $F(x)=(f \circ h)(x)$ avec : $h(x)=\sqrt{x-3}$

$x \in D_F \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3,+\infty[$

Donc : $D_F=[3,+\infty[$

Soit $x \in [3,+\infty[$: $F(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x-3}\right)^2+\frac{3}{2}-\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x-3}\right)^2-\sqrt{x-3}+\frac{3}{2}=f(\sqrt{x-3})$

Donc : $F(x)=f(h(x))=(f \circ h)(x)$; $\forall x \in [3,+\infty[$

b) Etudions les variations de : F sur $[4,+\infty[$

Sur $[4,+\infty[$: On a $F(x)=f(h(x))=(f \circ h)(x)$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

Tableau de variations de h:

x	3		$+\infty$
$h(x)$	0	↗	

Puisque h est croissante sur $[4,+\infty[$ et $\forall x \in [4,+\infty[: h(x) \in [1;+\infty[$ et f est croissante sur $[0;+\infty[$

alors : F est croissante sur $[4,+\infty[$

Exercice16 : Soit g la fonction définie par : $g(x)=\frac{1}{2-x}$ et (C_g) La courbe représentative de g

A)1) a) Déterminer la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer le tableau de variation de g

c) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $g(x)=x$ et $g(x)=1+x$

b) Déterminer le signe de : m^2+4m

c) Déterminer les valeurs de m ou la courbe (C_g) coupe la droite d'équation :

$y=x+m$ en deux points

B)1) a) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x+1}$

a) Calculer : $f(x)-f(y)$ $\forall x;y$

b) En déduire la monotonie de f dans: $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

c) Calculer : $f(x)+\dfrac{2}{3}$ puis en déduire son signe

d) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $-\dfrac{2}{3}\le f(x)\le 2$

2) On considère la fonction h tel que : $h(x)=\dfrac{x^2-x+1}{2(x-1)^2}$

a) a) Déterminer D_h et vérifier que : $h(x)=(g\circ f)(x)$ $x\neq 0$

b) Étudier la monotonie de h dans: $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

Solution : A) a) 1) a) Déterminons la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques : $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$

On a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

En générale si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et

d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

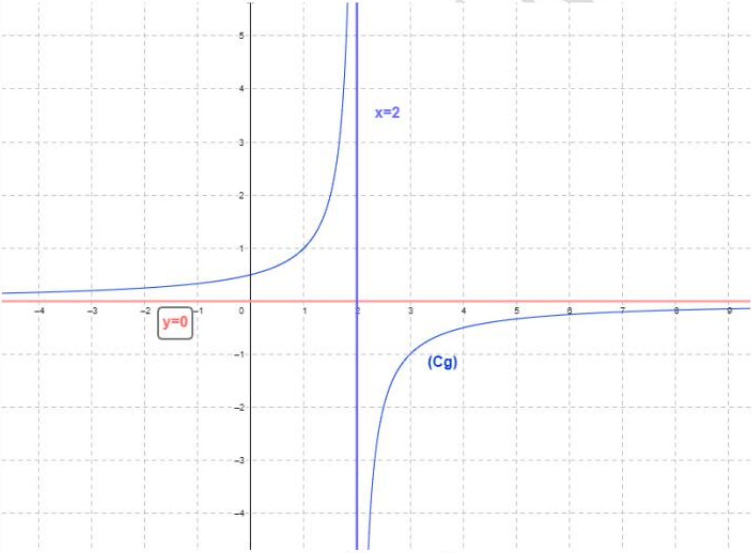
Dans notre exercice on a : $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $W(2;0)$ et

d'asymptotes les droites d'équations $x=2$ et $y=0$

b) $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$ on a : $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1\succ 0$

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
$g(x)$	↗ ‖	↗

PROF: ATMANI NAJIB



B) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations : $g(x)=x$ et $g(x)=1+x$

$$g(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x}=x \Leftrightarrow x(2-x)=1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

Donc : $S_1=\{1\}$

$$g(x)=1+x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x}=1+x \Leftrightarrow (1+x)(2-x)=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

$\Delta=b^2-4ac=1^2+4=5>0$ et $x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Donc : $S_2=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) Détermination du signe de : m^2+4m

m	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$m2+4m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Détermination des valeurs de m pour que la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points :

Résolution algébrique de l'équation $g(x)=x+m$

$g(x)=x+m \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1}=x+m \Leftrightarrow 2m+2x-x^2-xm=1 \Leftrightarrow x^2+(m-2)x-2m+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(m-2)^2-4\times1\times(-2m+1)=m^2+4m$

Donc : $\Delta=m^2+4m>0 \Leftrightarrow \quad m\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

Donc : l'équation $g(x)=x+m$ admet 2 solutions $\Leftrightarrow m\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

Donc : les valeurs de m pour que la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points sont : $m\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

B)1) a) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}$

a) Calculons : $f(x)-f(y)$; $\forall x;y$

$$f(x)-f(y)=\frac{2x}{x^2-x+1}-\frac{2y}{y^2-y+1}=\frac{2x(y^2-y+1)-2y(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2\frac{xy^2-xy+x-yx^2+xy-y}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$$

$$=2\frac{xy^2-yx^2+x-y}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2\frac{xy(y-x)-(y-x)}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2(y-x)\frac{xy-1}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$$

Donc : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$

b) En déduire la monotonie de f dans: $[-1;1]$et $\left[1;+\infty\right[$

On a : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$ donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$

Pour : x^2-x+1 et y^2-y+1 ; $\Delta=1-4<0$ donc : $x^2-x+1>0$ et $y^2-y+1>0$

Si : $x\in[-1;1]\Rightarrow -1\le x\le 1\Rightarrow |x|\le 1\,(1)$ et $y\in[-1;1]\Rightarrow -1\le y\le 1\Rightarrow |y|\le 1\,(2)$

(1) et $(2)\Rightarrow |x||y|\le 1\Rightarrow |xy|\le 1\Rightarrow -1\le xy\le 1\Rightarrow 0\le 1-xy$

Donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ge 0$ par suite f est croissante sur $[-1;1]$

Si : $x\in\left[1;+\infty\right[\Rightarrow x\ge 1\,(1)$ et $y\in\left[1;+\infty\right[\Rightarrow y\ge 1\,(2)$

(1) et $(2)\Rightarrow xy\ge 1\Rightarrow 1-xy\le 0$

Donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le 0$ par suite f est décroissante sur $\left[1;+\infty\right[$

c) Calcul de : $f(x)+\frac{2}{3}$ puis l'étude de son signe :

$$f(x)+\frac{2}{3}=\frac{2x}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}=\frac{6x+2x^2-2x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{2x^2+4x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{2(x^2+2x+1)}{3(x^2-x+1)}=\frac{2(x+1)^2}{3(x^2-x+1)}\ge 0$$

Car : $x^2-x+1\succ 0$ et $(x+1)^2\geq 0$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)+\frac{2}{3}\geq 0$ c'est-à-dire : $-\frac{2}{3}\leq f(x)$ ❶ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

d) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ -\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$

On a : $-\frac{2}{3}\leq f(x)$ ❶ ; $\forall x\in\mathbb{R}$. Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 2$

$$2-f(x)=2-\frac{2x}{x^2-x+1}=2\left(1-\frac{x}{x^2-x+1}\right)=2\frac{x^2-x+1-x}{(x^2-x+1)}=2\frac{x^2-2x+1}{(x^2-x+1)}=\frac{2(x-1)^2}{(x^2-x+1)}\geq 0$$

Car : $x^2-x+1\succ 0$ et $(x-1)^2\geq 0$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $2-f(x)\geq 0$ c'est-à-dire : $f(x)\leq 2$ ❷ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

❶ et❷ $\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$; $-\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$

2) On considère la fonction h tel que : $h(x)=\frac{x^2-x+1}{2(x-1)^2}$

a) Déterminons D_h et vérifions que : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad x\neq 0$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1\}=\mathbb{R}/\{1\}$; On a : $f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}$ et $g(x)=\frac{1}{2-x}$

Donc : $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{2-\dfrac{2x}{x^2-x+1}}$; $\forall x\in\mathbb{R}/\{1\}$

$$(g\circ f)(x)=\frac{1}{\frac{2x^2-2x+2-2x}{x^2-x+1}}=\frac{x^2-x+1}{2x^2-2x+2-2x}=\frac{x^2-x+1}{2x^2-4x+2}=\frac{x^2-x+1}{2(x^2-2x+1)}=\frac{x^2-x+1}{2(x-1)^2}=h(x)$$

b) Etude de la monotonie de h dans l'intervalle : $[1;+\infty[$ et $[-1;1]$

Puisque f est décroissante sur $[1;+\infty[$ et $f([1;+\infty[)\subset[2;+\infty[$ et g est croissante sur $]2;+\infty[$ alors $g\circ f=h$ est décroissante sur $[1;+\infty[$

Puisque f est croissante sur $[-1;1]$ et $f([-1;1])\subset]-\infty;2[$ et g est croissante sur $]-\infty;2[$ alors $g\circ f=h$ est croissante sur $[-1;1]$

Exercice17 : On considère l'application g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)>1$; g est-elle surjective ?

2) a) Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad g(x)-g(y)=\frac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}$

PROF: ATMANI NAJIB

b) Déduire que g est injective

3) Montrer que : la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]1;+\infty[$ et déterminer sa réciproque

Solution :1) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $g(x)-1=\sqrt{x^2+2x+2}-x-1=\sqrt{x^2+2x+1+1}-(x+1)=\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)$

Or : $\sqrt{(x+1)^2+1} > \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

Donc : $g(x)-1 > |x+1|-(x+1)$

Donc : $g(x)-1 > |x+1|-(x+1) \geq 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 1$

Donc : si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) > 1$

Donc : $g(\mathbb{R}) \subset]1;+\infty[$

Par exemple : $0 \notin]1;+\infty[$ et n'a pas d'antécédents par f

Donc : g est non surjective

2) a) Montrons que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}$

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x)-g(y)=\sqrt{x^2+2x+2}-x-\sqrt{y^2+2y+2}+y=\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{y^2+2y+2}-(x-y)$$

$$g(x)-g(y)=\frac{x^2+2x+2-y^2-2y-2}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}(x-y)$$

$$g(x)-g(y)=\frac{(x-y)(x+y)+2(x-y)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}-(x-y)$$

$$g(x)-g(y)=(x-y)\left[\frac{x+y+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}-1\right]$$

$$g(x)-g(y)=(x-y)\left[\frac{x+y+2-\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{y^2+2y+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}\right]$$

$$g(x)-g(y)=(x-y)\left[\frac{2-\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)-\left(\sqrt{y^2+2y+2}-y\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}\right]$$

Donc : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}$

b) Déduisons que g est injective :

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$:tel que : $g(x)=g(y)$

PROF. ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

$$\Rightarrow g(x)-g(y)=0 \Rightarrow \frac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}=0 \Rightarrow x-y=0 \text{ ou } 2-g(x)-g(y)=0$$

Or : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ g(x)>1$ donc : $g(x)>1$ et $g(y)>1$

Donc : $g(x)+g(y)>2 \Rightarrow 2-g(x)-g(y)\neq 0$

$\Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$

Par suite : g est injective

3) Montrons que : la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]1;+\infty[$ et déterminons sa réciproque :

Soit $y\in\,]1;+\infty[$:tel que : $g(x)=y$

$$g(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}-x=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}=x+y \Leftrightarrow x^2+2x+2=x^2+2xy+y^2$$

$\Leftrightarrow 2x+2=2xy+y^2 \Leftrightarrow 2x(1-y)=y^2-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{y^2-2}{2(1-y)}\in\mathbb{R}$ car $y-1\neq 0$

Donc : $\forall y\in\,]1;+\infty[\ \ \exists x!\in\mathbb{R}$: $x=\dfrac{y^2-2}{2(1-y)}$

Donc : la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]1;+\infty[$

$$f^{-1}:\begin{cases}]1;+\infty[\ \mapsto \mathbb{R} \\ x\mapsto f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-2}{2(1-x)} \end{cases}$$

Exercice18 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x\times E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1) Calculer : $f(2)$; $f(-2025)$; $f\left(-\dfrac{4}{9}\right)$

2) Déterminer : D_f

3) a) Montrer que : $\forall x\in\,]0;+\infty[$: $1-x\prec f(x)\leq 1$

b) Montrer que : $\forall x\in\,]-\infty;0[$: $1\leq f(x)\prec 1-x$

c) Donner une valeur simple de $f(x)$ sur $]1;+\infty[$ et sur $]-\infty;-1[$

Solution : 1) Calculer : $f(2)$; $f(2025)$; $f\left(-\dfrac{4}{9}\right)$

$f(2)=2\times E\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\times 0=0$ car $E\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ en effet : $0\leq\dfrac{1}{2}<0+1$

$f(-2025)=-2025\times E\left(-\dfrac{1}{2025}\right)=-2025\times(-1)=2025$ car $E\left(-\dfrac{1}{2025}\right)=-1$

en effet : $-1\leq-\dfrac{1}{2025}<-1+1$

$f\left(-\frac{4}{9}\right)=-\frac{4}{9}\times E\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{4}{9}\times(-3)=\frac{4}{3}$ car $E\left(-\frac{9}{4}\right)=-3$ en effet : $-3\leq-\frac{9}{4}<-3+1$

2) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq0\}=\mathbb{R}-\{0\}$

3) a) Montrons que : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\ :\ 1-x\prec f(x)\leq1$

Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$; On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x\Rightarrow\frac{1}{x}-1\prec E\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}\Rightarrow1-x\prec xE\left(\frac{1}{x}\right)\leq1$

b) Montrons que : $\forall x\in\left]-\infty;0\right[\ :\ 1\leq f(x)\prec1-x$

Soit $x\in\left]-\infty;0\right[$; On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x\Rightarrow\frac{1}{x}-1\prec E\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}\Rightarrow1\leq xE\left(\frac{1}{x}\right)\prec1-x$

c) Soit $x\succ1\Rightarrow0\prec\frac{1}{x}\prec1\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow f(x)=x\times E\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Soit $x\prec-1\Rightarrow-1\prec\frac{1}{x}\prec0\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=-1\Rightarrow f(x)=x\times E\left(\frac{1}{x}\right)=-1$

Exercice19 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x^2\times E\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $x-x^2\leq x^2E\left(\frac{1}{x}\right)\leq x$

3) Montrer que : $\forall x>1$; $f(x)=0$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq0\}=\mathbb{R}-\{0\}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}-\{0\}$;

On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x\Rightarrow\frac{1}{x}-1\prec E\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}\Rightarrow x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)\leq x^2E\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^2\frac{1}{x}$

3) Soit $x\succ1$

$x\succ1\Rightarrow0\prec\frac{1}{x}\prec1\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow f(x)=x^2\times E\left(\frac{1}{x}\right)=x^2\times0=0$

Exercice20 : Considérons les fonctions f et g définies par :

$f(x)=\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)$ avec : $(a;b)\in\mathbb{R}_+^*$

1) Déterminer : D_f

2) Montrer que : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$; $\frac{b}{a}-\frac{x}{a}\prec f(x)\leq\frac{b}{a}$

3) Montrer que : $\forall x\in\left]-\infty;0\right[$; $\frac{b}{a}\leq\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)\prec\frac{b}{a}-\frac{x}{a}$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}^*$

2)Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$; On sait que : $x-1\prec E(x)\le x\Rightarrow\frac{b}{x}-1\prec E\left(\frac{b}{x}\right)\le\frac{b}{x}$

$$\Rightarrow\frac{x}{a}\times\left(\frac{b}{x}-1\right)\prec\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)\le\frac{x}{a}\times\frac{b}{x}\Rightarrow\frac{b}{a}-\frac{x}{a}\prec\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)\le\frac{b}{a}$$

3) Soit $x\in\left]-\infty;0\right[$; On sait que : $x-1\prec E(x)\le x\Rightarrow\frac{b}{x}-1\prec E\left(\frac{b}{x}\right)\le\frac{b}{x}$

$$\Rightarrow\frac{x}{a}\times\frac{b}{x}\le\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)\prec\frac{x}{a}\times\left(\frac{b}{x}-1\right)\Rightarrow\frac{b}{a}\le\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)\prec\frac{b}{a}-\frac{x}{a}$$

Exercice21 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=E\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ avec : $n\in\mathbb{N}^*$

1) Déterminer : D_f

2) Montrer que : $\forall x\in\left]n;n+1\right[$; $1\le E\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\prec E\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$

3) Montrer que : $\forall x\in\left[0;n\right[$; $f(x)=0$

Solution : 1) $D_f=\left[0;+\infty\right[$

2) $n\prec x\prec n+1\Rightarrow 1\prec\frac{x}{n}\Rightarrow 1\prec\sqrt{\frac{x}{n}}\prec\sqrt{\frac{n+1}{n}}\Rightarrow 1\prec\sqrt{\frac{x}{n}}\prec\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow 1\le E\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\prec E\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$

3) $0\le x\prec n\Rightarrow 0\le\frac{x}{n}\prec 1\Rightarrow 0\le\sqrt{\frac{x}{n}}\prec 1\Rightarrow f(x)=E\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)=0$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF. ATMANI NAJIB