1er BAC Sciences math BIOF

Correction série N°13 : Généralités sur les fonctions

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{2x^4}{x^2-4}$ 2) $f(x)=\frac{x+5}{x^2-5x+7}$ 3) $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$ 4) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$

5) $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5}}$ 6) $f(x)=\sqrt{\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}}$ 7) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$

8) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ 9) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

Solution :1) $f(x)=\frac{2x^4}{x^2-4}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ou $x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

2) $f(x)=\frac{x+5}{x^2-5x+7}$: Le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times7=25-28=-3\prec 0$

Donc : Pas de racines par suite : $D_f=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2(x-1)\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0 \text{ ou } x=0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1 \text{ou } x=0\}$

Par suite : $D_f=\{0\}\cup[1;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+x+3>0\}$

$-2x^2+x+3=0$: $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc : on a deux racines : $x_1=\frac{-1+5}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\frac{-1-5}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

5) $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5}}$

PROF: ATMANI NAJIB

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{2x^2-3x+1}{x^2-5} \geq 0 \ \ et\ \ x^2-5 \neq 0 \right\}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{2x^2-3x+1}{x^2-5} \geq 0 \ \ et\ \ x \neq -\sqrt{5} \ \ et\ \ x \neq \sqrt{5} \right\}$$

$2x^2-3x+1=0$: $\Delta = 1 > 0$ donc $2x^2-3x+1=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$1/2$		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$q(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Par suite : $D_f = \left]-\infty;-\sqrt{5}\right[\cup \left[\frac{1}{2},1\right] \cup \left]\sqrt{5},+\infty\right[$

6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17} \geq 0 \ \ et\ -x^2+8x-17 \neq 0 \right\}$$

- $-x^2+8x-17$: Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a \times c = 8^2 - 4\times(-1)\times(-17) = 64-68 = -4 < 0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles
Comme : Le coefficient principal est : $a=-1<0$ et $\Delta < 0$, alors : $-x^2+8x-17<0$

- Pour déterminer le signe du trinôme : $-6x^2-9x-3$

Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=-9$; $c=-3$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a \times c = (-9)^2 - 4\times(-6)\times(-3) = 81-72 = 9 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{9-\sqrt{9}}{2a} = \frac{9-3}{2\times(-6)} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{9+\sqrt{9}}{2a} = \frac{9+3}{2\times(-6)} = \frac{12}{-12} = -1$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $D_f = \left]-\infty;-1\right] \cup \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

7) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$: Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$: $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{|x|}\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$

Or on sait que $|x|\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

8) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0 \text{ et } x-1\neq 0\}$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2 \text{ et } x\neq 1\}$ c'est-à-dire : $D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

9) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$:

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\geq 0 \text{ et } 3-5x\geq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq\frac{1}{2} \text{ et } x\leq\frac{3}{5}\right\}$

Donc : $D_f=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$

Exercice2 : soit f une fonction définie par : $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f

2) Montrer que f est périodique de période $T=\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$

2) a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $\pi+x\in\mathbb{R}$

b) $f(\pi+x)=2\cos\left(2(\pi+x)+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$f(\pi+x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$

Donc : f est périodique de période $T=\pi$

Remarque : la fonction : $x\rightarrow\cos(ax+b)$ est périodique de période $T=\frac{2\pi}{|a|}$ si $a\neq 0$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=\pi$

Donc : par exemple : $D_E=[0;\pi]$

Exercice3 : Soit f une fonction définie par : $f(x)=4\sin x+\cos 2x$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f

2) Montrer que f est périodique de période $T=2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

Solution :1) $D_f = \mathbb{R}$

2)a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

b) $f(2\pi + x) = 4\sin(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi))$

$f(2\pi + x) = 4\sin x + \cos(2x) = f(x)$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$

Donc : par exemple : $D_E = [0; 2\pi]$

Exercice4 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x^2 + 6x - 2$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$ Montrer que : $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 6$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur : $I = [-3; +\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur : $J =]-\infty; -3]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : f est minorée sur $\mathbb{R}$

b) En déduire que : pour tout $x \in [-2; 2]$ On a : $-10 \leq f(x) \leq 14$

c) En déduire que : pour tout $x \in [-6; -4]$ On a : $-10 \leq f(x) \leq -2$

Solution : $f(x) = x^2 + 6x - 2$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

2)Soient : $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^2 + 6x_2 - 2) - (x_1^2 + 6x_1 - 2)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 + 6x_2 - 2 - x_1^2 - 6x_1 + 2}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{x_2^2 - x_1^2 + 6(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 6(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 6)}{x_2 - x_1}$$

Par suite : $T(x_1; x_2) = x_2 + x_1 + 6$

3)a) Montrons que f est strictement croissante sur $[-3; +\infty[$

Soient : $x_1 \in [-3; +\infty[$ et $x_2 \in [-3; +\infty[$ alors : $x_1 \geq -3$ et $x_2 \geq -3$ avec $x_1 \neq x_2$ implique $x_1 + x_2 > -6$

Par suite : $x_1 + x_2 + 6 > 0$

Donc $T(x_1; x_2) > 0$ d'où : f est strictement croissante sur $I = [-3; +\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J =]-\infty; -3]$

Soient : $x_1 \in]-\infty; -3]$ et $x_2 \in]-\infty; -3]$ alors : $x_1 \leq -3$ et $x_2 \leq -3$ et $x_1 \neq x_2$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Cela implique $x_1 + x_2 < -6$

Par suite : $x_1 + x_2 + 6 < 0$

Donc $T(x_1; x_2) < 0$

D'où : f est décroissante sur $J =]-\infty; -3]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-3) = (-3)^2 + 6\times(-3) - 2 = 9 - 18 - 2 = -11$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	↘	-11	↗

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-3) = -11$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(-3) \leq f(x)$

Par suite : $-11 \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc : f est minorée sur $\mathbb{R}$

b) Soit : $x \in [-2; 2]$ alors : $-2 \leq x \leq 2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I = [-3; +\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-2; 2]$

Alors : $f(-2) \leq f(x) \leq f(2)$ et comme : $f(-2) = (-2)^2 + 6\times(-2) - 2 = 4 - 12 - 2 = -10$ et $f(2) = 2^2 + 6\times 2 - 2 = 4 + 12 - 2 = 14$

Par suite : $-10 \leq f(x) \leq 14$

b) Soit : $x \in [-6; -4]$ On a alors : $-6 \leq x \leq -4$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J =]-\infty; -3]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-6; -4]$

Alors : $f(-4) \leq f(x) \leq f(-6)$ et comme :

$f(-4) = (-4)^2 + 6\times(-4) - 2 = 16 - 24 - 2 = -10$ Et $f(-6) = (-6)^2 + 6\times(-6) - 2 = 36 - 36 - 2 = -2$

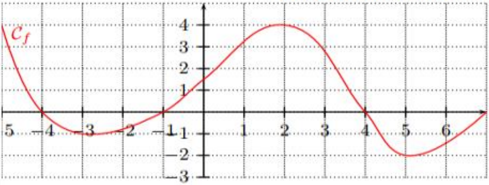
Par suite : $-10 \leq f(x) \leq -2$

D'où : l'expression de $f(x)$ est : $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Exercice5 : Soit la fonction définie par la représentions graphique suivante sur l'intervalle : $[-5; 7]$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB



1) Dresser son tableau de variation sur l'intervalle : $[-5;7]$

2) Déterminer :

a) Le maximum absolu de f sur [−5 ; 7] b) Le minimum de f sur [−5 ; 7]

c) Le minimum de f sur [−5 ; 2]

3) Etudier le signe de la fonction f sur l'intervalle : $[-5;7]$

Solution : 1) ➔ Cette fonction est décroissante sur [−5 ; −3], croissante sur [−3 ; 2], décroissante sur [2 ; 5], puis croissante [5 ; 7].

➔ Ou encore : f est croissante sur [−3 ; 2] et sur [5 ; 7], décroissante sur [−5 ; −3] et sur [2 ; 5].

D'où : son tableau de variation sur l'intervalle : $[-5;7]$ est :

x	-5		-3		2		5		7
$f(x)$	4	↘	-1	↗	4	↘	-2	↗	0

2) a) Le maximum de f sur [−5 ; 7] est M = 2, atteint pour x = −5 et x = 2.

b) Le minimum de f sur [−5 ; 7] est m = −2, atteint pour x = 5.

c) le minimum de f sur [−5 ; 2] est m = −1, atteint pour x = −3.

Attention : la valeur d'un extremum dépend de l'intervalle.

3) Etudions le signe de la fonction f sur l'intervalle : $[-5;7]$

On réunit au sein d'un tableau appelé tableau de signes les informations concernant le signe de la fonction f, c'est à dire sa position par rapport à l'axe des abscisses

x	-5		-4		-1		4		7
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Exercice6 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}-2}{\sqrt{|x|}+2}$

1) Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité.

2) Etudier les variations de f.

3) a) Montrer que pour tout x dans IR on a : $-1 \leq f(x) < 1$

b) Montrer que -1 est le minimum absolu de f, et que f n'admet pas de maximum absolu.

4) Montrer que f est une bijection de : $\mathbb{R}^+$ vers [− 1,1 [, puis déterminer sa bijection réciproque.

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice7 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ tel que : $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}$

1) Montrer que -1 est le minimum absolu de f

2) Montrer que la fonction f n'est pas majorée.

Exercice8 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}$

(C_f) Sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que : f est impaire

3)a) Montrer que la courbe représentative de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ est une portion d'une hyperbole que l'on précisera

b) En déduire une méthode pour tracer la courbe (C_g) de fonction g

4)Etudier les variations de de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ puis donner le tableau de variation de f sur D_f

5) Construire (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}$

1)On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|-2\neq 0$

Signifie $|x|\neq 2$ c'est-à-dire : $x\neq 2$ et $x\neq -2$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

2)a) Montrons que f est impaire :

☞ $x\in D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$ Signifie $x\neq 2$ et $x\neq -2$

Signifie $-x\neq -2$ et $-x\neq -(-1)$

Signifie $-x\neq -1$ et $-x\neq 2$

Signifie $-x\in D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

☞ $f(-x)=\frac{-x}{|-x|-2}=\frac{-x}{|x|-2}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $f(-x)=-\frac{x}{|x|-2}=-f(x)$ par suite : f est impaire

3)a) Soit : $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$ donc : $x\geq 0$

Donc : $|x|=x$ par suite : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}=\frac{x}{x-2}$

Et puisque f est impaire alors il suffit de tracer son symétrique par rapport au centre du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

PROF : ATMANI NAJIB

Soit $x \in [0;2[\cup]2;+\infty[$ on a : $f(x)=\frac{x}{x-2}=\frac{x-2+2}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}+\frac{2}{x-2}=1+\frac{2}{x-2}$

Donc : $f(x)=1+\frac{2}{x-2}$ Pour tout $x \in [0;2[\cup]2;+\infty[$

Puisque : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $k=1>0$

Donc : sur $[0;2[\cup]2;+\infty[$ (C_f) est une portion d'une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=1$

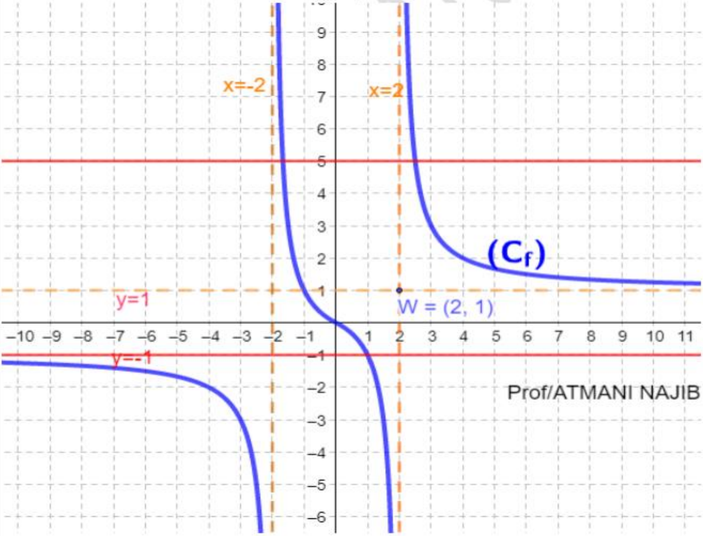
b) la courbe (C_f) de fonction f sur $[0;2[\cup]2;+\infty[$ coïncide avec la portion de l'hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=1$

4)Puisque : $k=1>0$ alors f est strictement décroissante sur $[0;2[$ et $]2;+\infty[$

Puisque f est impaire alors en déduit le tableau de variation de f sur D_f

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘ 0 ↘	‖	↘

5) Construction de (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



Exercice9 : Soit g la fonction définie par : $g(x)=\frac{1}{2-x}$ et (C_g) La courbe représentative de g

---

1)a) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

b) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $g(x)=x$ et $g(x)=1+x$

b) Donner une interprétation graphique des résultats

c) Déterminer le signe de : m^2+4m

d) Déterminer les valeurs de m ou la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points

3) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}$

a) Déterminer D_f

b) Montrer : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$ $si\ x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

c) En déduire la monotonie de f dans : $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

d) Calculer : $f(x)+\frac{2}{3}$ puis en déduire que $-\frac{2}{3}\leq f(x)$; si $x\in\mathbb{R}$

e) Montrer que : si $x\in\mathbb{R}$ alors : $-\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$

Solution : 1) a) Déterminons la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques : $g(x)=\frac{1}{2-x}$

On a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

On utilisant un résumé de notre cours :

Si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

1iér cas : si $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre exercice on a : $g(x)=\frac{1}{2-x}=\frac{0x+1}{-x+2}$ Avec : $a=0$; $b=1$; $c=-1$; $d=2$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre : $W(2;0)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-\frac{2}{-1}=2$ et $y=\frac{0}{-1}=0$

PROF: ATMANI NAJIB

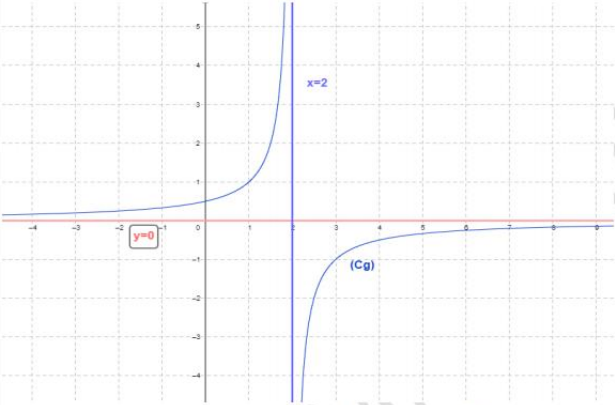
$\operatorname{Det}(g)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\times0-(-1)\times1=1>0$

Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]-\infty;2[$ *et* $]2;+\infty[$

Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

b) Traçage de la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations : $g(x)=x$ et $g(x)=1+x$

$$g(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x}=x \Leftrightarrow x(2-x)=1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

Donc : $S_1=\{1\}$

$$g(x)=1+x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x}=1+x \Leftrightarrow (1+x)(2-x)=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

$\Delta=b^2-4ac=1^2+4=5>0$ et $x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Donc : $S_2=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) interprétation graphique des résultats :

- Pour l'équation : $g(x)=x$

La courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x$ en un point c'est : $A(1;1)$

- Pour l'équation : $g(x)=1+x$

La courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+1$ en deux points : $B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$ et $C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)$ c'est-à-dire : $B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

c) Détermination du signe de : m^2+4m

m	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$m2+4m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) Détermination des valeurs de m pour que la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points : Résolution algébrique de l'équation $g(x)=x+m$

$$g(x)=x+m \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1}=x+m \Leftrightarrow 2m+2x-x^2-xm=1 \Leftrightarrow x^2+(m-2)x-2m+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(m-2)^2-4\times1\times(-2m+1)=m^2+4m$$

Donc : $\Delta=m^2+4m>0$ signifie que : $m\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

Donc : l'équation $g(x)=x+m$ admet 2 solutions si et seulement si : $m\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

Donc : les valeurs de m pour que la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points sont : $m\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

3) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}$

a) Détermination de D_f

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-x+1\neq0\}$$

Le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$

Donc : Pas de racines par suite : $D_f=\mathbb{R}$

b) Calculons : $f(x)-f(y)$ *si* $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$$f(x)-f(y)=\frac{2x}{x^2-x+1}-\frac{2y}{y^2-y+1}=\frac{2x(y^2-y+1)-2y(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2\frac{xy^2-xy+x-yx^2+xy-y}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$$

$$=2\frac{xy^2-yx^2+x-y}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2\frac{xy(y-x)-(y-x)}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2(y-x)\frac{xy-1}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$$

Donc : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$

c) En déduire la monotonie de f dans: $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

On a : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$ donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$

Pour : x^2-x+1 et y^2-y+1 ; $\Delta=1-4<0$ donc : $x^2-x+1\succ0$ et $y^2-y+1\succ0$

PROF. ATMANI NAJIB

Si : $x\in[-1;1]\Rightarrow -1\le x\le 1\Rightarrow |x|\le 1$ (1) et $y\in[-1;1]\Rightarrow -1\le y\le 1\Rightarrow |y|\le 1$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow |x||y|\le 1\Rightarrow |xy|\le 1\Rightarrow -1\le xy\le 1\Rightarrow 0\le 1-xy$

Donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ge 0$ par suite f est croissante sur $[-1;1]$

Si : $x\in[1;+\infty[\Rightarrow x\ge 1$ (1) et $y\in[1;+\infty[\Rightarrow y\ge 1$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow xy\ge 1\Rightarrow 1-xy\le 0$

Donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le 0$ par suite f est décroissante sur $[1;+\infty[$

d) Calcul de : $f(x)+\frac{2}{3}$ puis l'étude de son signe :

$$f(x)+\frac{2}{3}=\frac{2x}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}=\frac{6x+2x^2-2x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{2x^2+4x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{2(x^2+2x+1)}{3(x^2-x+1)}=\frac{2(x+1)^2}{3(x^2-x+1)}\ge 0$$

Car : $x^2-x+1\succ 0$ et $(x+1)^2\ge 0$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)+\frac{2}{3}\ge 0$ c'est-à-dire : $-\frac{2}{3}\le f(x)$ ❶ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

e) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ -\frac{2}{3}\le f(x)\le 2$

On a : $-\frac{2}{3}\le f(x)$ ❶ ; $\forall x\in\mathbb{R}$. Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le 2$

$$2-f(x)=2-\frac{2x}{x^2-x+1}=2\left(1-\frac{x}{x^2-x+1}\right)=2\frac{x^2-x+1-x}{(x^2-x+1)}=2\frac{x^2-2x+1}{(x^2-x+1)}=\frac{2(x-1)^2}{(x^2-x+1)}\ge 0$$

Car : $x^2-x+1\succ 0$ et $(x-1)^2\ge 0$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $2-f(x)\ge 0$ c'est-à-dire : $f(x)\le 2$ ❷ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

❶ et❷ $\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$; $-\frac{2}{3}\le f(x)\le 2$

Exercice10 : Soit la fonction h définie sur $[1;+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{x^3-1}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.

2) Déterminer les variations de h.

Solution :1) La fonction h se décompose de cette façon : $h=g\circ f$

On a alors : $f(x)=x^3$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

2)

PROF. ATMANI NAJIB

x	1	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

On sait que : ⇨ f est croissante sur $[1;+\infty[$

On a : $f([1;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ En effet : $x\in[1;+\infty[\Rightarrow x\geq 1\Rightarrow x^3\geq 1^3\Rightarrow x^3\geq 1\Rightarrow f(x)\in[1;+\infty[$

⇨et comme g est croissante sur $[1;+\infty[$

Alors : La fonction h croissante sur $[1;+\infty[$

Exercice11 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+x+6$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x)\geq\frac{1}{2}$

3) Etudier la monotonie de $f\circ f$ sur $\mathbb{R}$

4) Calculer $(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=-x^2+x+6$

1) Dressons le tableau de variations de la fonction f

f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=-1<0$ et $b=1$ et $c=6$ donc : $\alpha=-\frac{-1}{2(-1)}=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+6=\frac{1}{4}+6=\frac{25}{4}$

La courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$; $S\left(\frac{1}{2};\frac{25}{4}\right)$ et d'axe de symétrie la droite

$x=\alpha$ C'est-à-dire : $x=\frac{1}{2}$

Tableau de variations de f : on a $a=-1<0$ donc :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{25}{4}$	↘

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x)\geq\frac{1}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow -x^2+x+6\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow -x^2+x+\frac{11}{2}\geq 0$

$a=-1$ et $b=1$ et $c=\frac{11}{2}$ et $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-1)\times\frac{11}{2}=1+22=23>0$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{23}}{2\times(-1)}=\frac{-1+\sqrt{23}}{-2}=\frac{1-\sqrt{23}}{2}$ Et $x_2=\frac{-1-\sqrt{23}}{2\times(-1)}=\frac{-1-\sqrt{23}}{-2}=\frac{1+\sqrt{23}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{23}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{23}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+\frac{11}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2},\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]$

3) Etudions la monotonie de $f\circ f$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{23}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{23}}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{25}{4}$	↘ $\frac{1}{2}$	↘

→Sur $\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{23}}{2}\right]$: Puisque f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{23}}{2}\right]$ et

$\forall x\in\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{23}}{2}\right]$: $f(x)\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ c'est-à-dire : $f\left(\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{23}}{2}\right]\right)\subset\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ et comme f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ alors : $f\circ f$ est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{23}}{2}\right]$

→Sur $\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{1}{2}\right]$:

Puisque f est croissante sur $\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{1}{2}\right]$ et $\forall x\in\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{1}{2}\right]$: $f(x)\geq\frac{1}{2}$ c'est-à-dire :

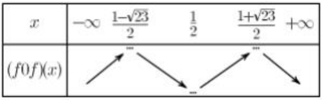
$f\left(\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{1}{2}\right]\right)\subset\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et comme f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors : $f\circ f$ est décroissante sur $\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{1}{2}\right]$

PROF: ATMANI NAJIB

→Sur $\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]$: Puisque f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]$ et $\forall x\in\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]: f(x)\geq\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $f\left(\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]\right)\subset\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et comme f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors : $f\circ f$ est croissante sur $\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]$

→Sur $\left[\frac{1+\sqrt{23}}{2};+\infty\right[$: Puisque f est décroissante sur $\left[\frac{1+\sqrt{23}}{2};+\infty\right[$ et $\forall x\in\left[\frac{1+\sqrt{23}}{2};+\infty\right[: f(x)\leq\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $f\left(\left[\frac{1+\sqrt{23}}{2};+\infty\right[\right)\subset\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ et comme f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ alors : $f\circ f$ est décroissante sur $\left[\frac{1+\sqrt{23}}{2};+\infty\right[$

Tableau de variations de $f\circ f$:


x
$-\infty$
$\frac{1-\sqrt{23}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1+\sqrt{23}}{2}$
$+\infty$
$(f0f)(x)$
...
...
...

4) Calculons : $(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $(f\circ f)(x)=f(f(x))=-f(x)^2+f(x)+6=-(-x^2+x+6)^2-x^2+x+6+6$

$(f\circ f)(x)=-(-x^2+(x+6))^2-x^2+x+6+6$

On a : $((x+6)-x^2)^2=(x+6)^2-2x^2(x+6)+x^4=x^2+12x+36-2x^3-12x^2+x^4$

Donc : $((x+6)-x^2)^2=x^4-2x^3-11x^2+12x+36$

Donc : $(f\circ f)(x)=-x^4+2x^3+11x^2-12x-36-x^2+x+12$

Donc : $(f\circ f)(x)=-x^4+2x^3+10x^2-11x-24$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice12 : Soient f et g les trois fonctions définies par : $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

3) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;5)$

b) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) a) Etudier graphiquement le signe de la fonction g

b) Etudier algébriquement le signe de la fonction g

6) a) Résoudre graphiquement de l'équation $f(x)=g(x)$:

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

7)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

a) Déterminer D_h

b) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)\quad \forall x\in D_h$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $]1;+\infty[$; $\left[-\dfrac{1}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$

Solution : 1) $f(x)=x^2+1$

On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=1$; $b=0$ et $c=1$

Donc $\alpha=-\dfrac{0}{2a}=0$ et $f(\alpha)=f(0)=0^2+1=1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;h(\alpha))$ c'est à dire : $W(0;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=0$

Comme : $\boxed{a=1>0}$ alors :

La fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$

Le tableau de variations de f : $\boxed{a=1>0}$

ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	

2) $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$; on a $g(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; On utilisant un résumé de notre cours :

Si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

1iér cas : si $\operatorname{Det}(g)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\operatorname{Det}(g)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre exercice on a : $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ Avec : $a=2$; $b=1$; $c=1$; $d=-1$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-\dfrac{-1}{1}=1$ et $y=\dfrac{2}{1}=2$

$\operatorname{Det}(g)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\times(-1)-1\times 1=-3<0$

Donc : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$

Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	↘	‖	↘

3) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x+1}{x-1}=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $A\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$

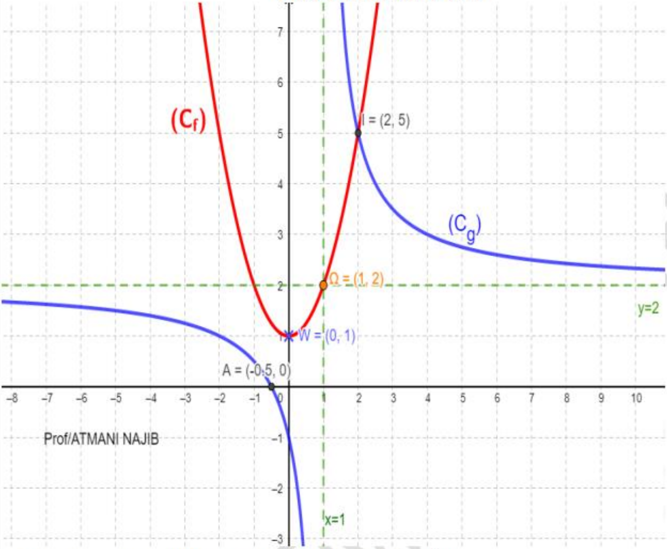
4) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2\ ;5)$

$f(2)=2^2+1=5$ donc : $A(2;5)\in(C_f)$ et $g(2)=\dfrac{2\times 2+1}{2-1}=5$ donc : $A(2;5)\in(C_g)$

Donc : $(C_f)\cap(C_g)=\{A(0;2)\}$

b) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

PROF: ATMANI NAJIB



5) a) Etude graphique du signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

$g(x) \geq 0$ si et seulement si la courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses

$g(x) \geq 0$ Signifie que $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[$

$g(x) \leq 0$ Signifie que $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right[$

b) Etudions algébriquement le signe de la fonction g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Voici le tableau de signe qui résume le signe de g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$g(x) \geq 0 \ \forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[$ et $g(x) \leq 0 \ \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right[$

6) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$:

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2\,;\,5)$

Donc : l'abscisse du point d'intersection des courbes (C_f) et (C_g) est $x = 2$ par suite : $S = \{2\}$

b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$

Donc $S =]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$

7) a) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{5x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + 1 \neq 0\}$

On a $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Donc : $D_h = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

b) Vérifions que : $h(x) = (f \circ g)(x) \quad \forall x \in D_h$

Soit : $x \in \mathbb{R} - \{1\}$; $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2 + 1 = \frac{(2x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 + 4x + 1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2}$

Donc : $(f \circ g)(x) = \frac{5x^2 + 2x + 2}{(x-1)^2} = \frac{5x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 1} = h(x)$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $]1;+\infty[$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

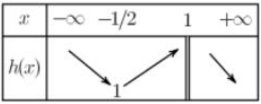
a) sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$: On a $h(x)=(f\circ g)(x)\quad \forall x\in D_h$

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]: g(x)\in[0;+\infty[$ et f est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

b) sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[: g(x)\in\left]-\infty;0\right]$ et f est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$ alors $h=f\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$

c) Sur $]1;+\infty[$: Puisque g est décroissante sur $]1;+\infty[$ et $\forall x\in]1;+\infty[\, g(x)\in]0;+\infty[$ et f est croissante sur $]0;+\infty[$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $]1;+\infty[$.

Donc le tableau de variations de h:


x
$-\infty$
$-1/2$
1
$+\infty$
$h(x)$
1

Exercice13 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x+1}$ et $f(x)=\frac{x}{x+2}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer D_h tel que : $h=g\circ f$

2) Déterminer les tableaux de variations de f et g

3) a) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Résoudre graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'inéquation : $x>(x+2)\sqrt{x+1}$

4) Étudier les variations de h sur : $]-\infty;-2[$ et $[-1;+\infty[$

5) Calculer $h(x)=(g\circ f)(x)\ \forall x\in D_h$

Solution : $g(x)=\sqrt{x+1}$ et $f(x)=\frac{x}{x+2}$ et $h=g\circ f$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -2\}=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1\}=[-1,+\infty[$

$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_f \ \ et\ f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq -2 \ \ et\ f(x) \geq -1 \right\}$

$f(x) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+x+2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x+2} \geq 0$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x+2}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$f(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-2\right[\cup \left[-1;+\infty\right[$

Donc : $D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq -2 \ \ et\ x \in \left]-\infty;-2\right[\cup \left[-1;+\infty\right[\right\}$

Donc : $D_h = \left]-\infty;-2\right[\cup \left[-1;+\infty\right[$

1) Déterminons les tableaux de variations de f et g

→Le tableau de variations de f : $f(x) = \frac{x}{x+2}$

En générale si : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $c \neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x) = \frac{x}{x+2}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $C(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -2$ et $y = 1$

$f(x) = \frac{1x+0}{1x+2}$: on a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 > 0$

Donc : f est strictement croissante sur : $\left]-\infty;-2\right[$ et $\left]-2;+\infty\right[$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

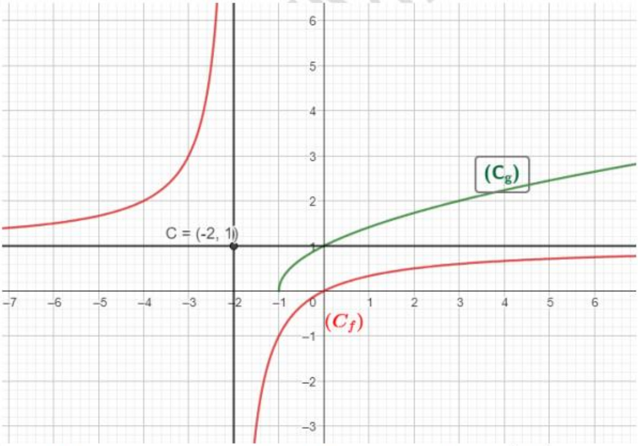
→$g(x) = \sqrt{x+1}$; g est strictement croissante sur : $\left[-1;+\infty\right[$

Le tableau de variations de g :

x	-1		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	

PROF. ATMANI NAJIB

3) a) Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



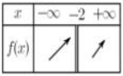
b) Résolvons graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'inéquation : $x > (x+2)\sqrt{x+1}$

Soit : $x \in [-1,+\infty[\ : \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow x+2 \geq 1 > 0$

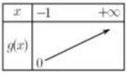
$x > (x+2)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{x}{(x+2)} > \sqrt{x+1}$ car $x+2>0$

$x > (x+2)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

Et puisque : graphiquement sur $[-1;+\infty[$ (C_f) est au-dessous de (C_g) alors : $S = \varnothing$



x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗



x	-1	$+\infty$
$g(x)$	0	↗

4) →Etudions les variations de $h = g \circ f$ sur : $]-\infty;-2[$

Puisque f est croissante sur $]-\infty;-2[$

et $f([-2;+\infty[) \subset]1;+\infty[$ et g est croissante sur $]1;+\infty[$

alors : $h = g \circ f$ est croissante sur $]-\infty;-2[$

→Etudions les variations de h sur : $[-1;+\infty[$

Puisque f est croissante sur $[-1;+\infty[$

et $f([-1;+\infty[) \subset [-1;1[$ et g est croissante sur $[-1;1[$ alors $h = g \circ f$ est croissante sur $[-1;+\infty[$

5) Calculons : $h(x) = (g \circ f)(x) \ \forall x \in D_h$

Soit $x \in]-\infty;-2[\cup [-1;+\infty[$: $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)+1} = \sqrt{\dfrac{x}{x+2}+1} = \sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}$

Alors : $h(x)=\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}$; $\forall x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left[-1;+\infty\right[$

Exercice14 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

1) ä) Montrer que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=1+(g(x))^2$ où g est une fonction à déterminer

b) En déduire que : f est minorée sur D_f

c) f admet-elle un minimum absolu ? justifier

d) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et tracer (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Vérifier que : $f(x)=(h\circ g)(x)\ \ \forall x\in D_f$

b) Etudier le signe de la fonction g sur D_g

3) Etudier la monotonie de f dans les intervalles : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $\left]1;+\infty\right[$

4) Dresser le tableau de variation de f et déterminer les extrémums de la fonction f.

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=\frac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

1) ä) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: On a $f(x)=\frac{1(x^2-2x+1)+4x^2+4x+1}{x^2-2x+1}$

Alors : $f(x)=\frac{1(x^2-2x+1)+4x^2+4x+1}{(x-1)^2}=\frac{1(x-1)^2+(2x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{1(x-1)^2}{(x-1)^2}+\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^2}$

Alors : $f(x)=1+\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^2}=1+\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$ avec : $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

b) Déduisons que : f est minorée sur D_f

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: Montrons que : $1\le f(x)$

Puisque : $f(x)=1+\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$

Alors : $f(x)-1=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : $1\le f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Par suite f est minorée sur $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

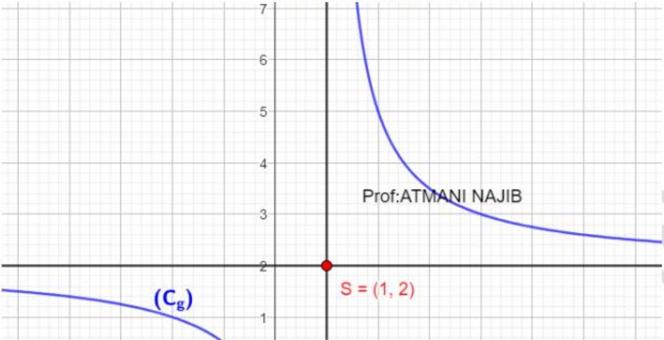
c) Comme : $f(x)-1=0\Leftrightarrow\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

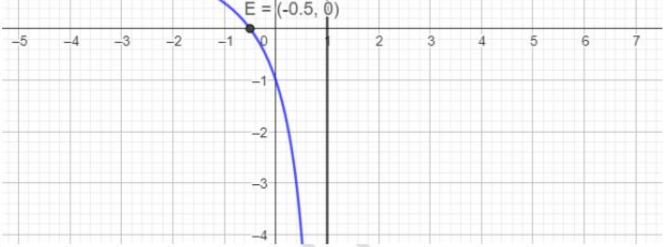
Alors : $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ et donc : $f\left(-\frac{1}{2}\right)\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : f admet-elle un minimum absolu c'est 1 en $-\frac{1}{2}$

d) $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$; $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$: $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-1=-3<0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $S(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$.





2) a) Vérifions que : $f(x)=(h\circ g)(x) \quad \forall x\in D_f$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $(h\circ g)(x)=h(g(x))=f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2+1=\frac{(2x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{4x^2+4x+1+x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

Donc : $(f\circ g)(x)=\frac{5x^2+2x+2}{(x-1)^2}=\frac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}=f(x)$

Donc : $f=h\circ g$

c) Etudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

On peut étudier le signe soit :

Graphiquement : $\rightarrow(C_g)$ est au-dessous de l'axe des abscisses si : $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

Donc : $g(x)\le 0 \quad \forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

$\rightarrow(C_g)$ est au-dessus de l'axe des abscisses si : $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left]1;+\infty\right[$

Donc : $g(x)\ge 0 \ \forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left]1;+\infty\right[$

Algébriquement : Le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$g(x)\ge 0 \ \forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left]1;+\infty\right[$ et $g(x)\le 0 \ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $\left]1;+\infty\right[$

Le tableau de variation de h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		↘	1	↗	

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		↘	‖	↘	

a) sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$: On a $f(x)=(h\circ g)(x)\quad \forall x\in D_f$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$g(x)$		↘	0	↘	‖	↘	

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]: g(x)\in\left[0;+\infty\right[$ (voir signe de g) et h est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

b) sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[: g(x)\in\left]-\infty;0\right]$ (voir signe de g) ; et h est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$

c) Sur $\left]1;+\infty\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left]1;+\infty\right[$ et $\forall x\in\left]1;+\infty\right[g(x)\in\left]0;+\infty\right[$

(Voir signe de g) et h est croissante sur $\left]0;+\infty\right[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]1;+\infty\right[$.

5)le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	‖	↘	

→Le nombre 1 est le minimum relatif de f en $-\frac{1}{2}$

Exercice15 : Soit f une fonction numérique définie sur $\left[1;+\infty\right[$ tel que : $f(x)=x-2\sqrt{x-1}-1$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF : ATMANI NAJIB

1) Déterminer $A=f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$ et en déduire que f n'est pas injective.

2) On considère les deux fonctions : $u(x)=x^2-2x$ et $v(x)=\sqrt{x-1}$

a) Démontrer que : $f(x)=(u\circ v)(x)$; $\forall x\in[1;+\infty[$

b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation

c) En déduire que f n'est pas surjective de $[1;+\infty[$ vers IR .

3) Déterminer le maximum absolu de la fonction : $g(x)=\frac{1}{x}\left(1-2\sqrt{x-x^2}-1\right)$ sur l'intervalle $\left[\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right]$

Exercice16 : soit f une fonction définie par : $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

2) Etudier la parité de f

3) Vérifier que 2π est une période pour la fonction f

4) En déduire un domaine d'étude de f

5) Déterminer les points d'intersections de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

6) Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation : $f(x)\geq 0$

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-3\pi;3\pi]$

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-cox\neq 0\}$

$1-\cos x=0\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow\cos x=\cos 0\Leftrightarrow x=0+2k\pi\Leftrightarrow x=2k\pi$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{R}-\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$

2) Etude de la parité de f :

a) si $x\in\mathbb{R}-\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$ c'est-à-dire : $x\neq 2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

Alors : $-x\neq 2(-k)\pi;\ k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-x\in\mathbb{R}-\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$

$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{1-\cos(-x)}=-\frac{\sin x}{1-\cos x}=-f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc f est impair

3) Vérifions que 2π est une période pour la fonction f

a) Si $x\in\mathbb{R}-\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$ alors : $2\pi+x\in\mathbb{R}-\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$

b) $f(2\pi+x)=\frac{\sin(2\pi+x)}{1-\cos(2\pi+x)}=\frac{\sin x}{1-\cos x}=f(x)$

Donc : f est périodique de période $T=2\pi$

4) Un domaine d'étude de f

2π est une période pour la fonction f donc :il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=2\pi$

par exemple : $D=D_f\cap[-\pi;\pi]=[-\pi;\pi]-\{0\}$

et puisque f est impair il suffit d'étudier f sur $D_E=([-\pi;\pi]-\{0\})\cap[0;+\infty[=]0;\pi]$

5) Déterminons les points d'intersections de la courbe(C_f) avec l'axe des abscisses :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{1-\cos x}=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=0+2k\pi \text{ ou } x=\pi+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

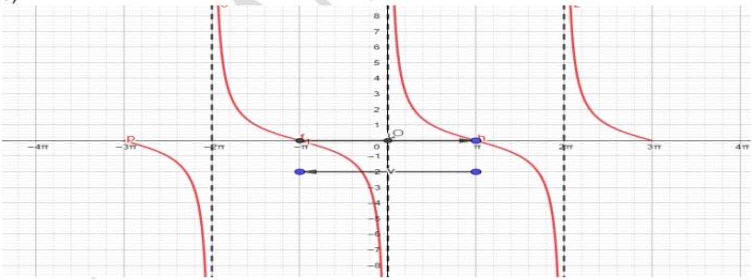
Et puisque $2k\pi \notin D_f$ alors : les points d'intersections de la courbe(C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A_k(\pi+2k\pi;0)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

6) Résolution dans $[0;2\pi[$ de l'inéquation : $f(x)\geq 0$

x	0		π		2π
$sinx$		$+$	0	$-$	
$1-cosx$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Donc : $S=]0;\pi]$

7)



Exercice17 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-1)\times E\left(\frac{1}{x-1}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) Montrer que :si $x\succ 1$ alors : $-x+2\prec(x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq 1$

ATMANI NAJIB

3) Montrer que :si $x\prec 1$ alors : $1\leq(x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq -x+2$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2)Soit $x\succ 1$; On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x \Rightarrow \frac{1}{x-1}-1\prec E\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq\frac{1}{x-1}$

On a : $x-1\succ 0\Rightarrow(x-1)\left(\frac{1}{x-1}-1\right)\prec(x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq(x-1)\frac{1}{x-1}$

Donc : si $x \succ 1$ alors $1-(x-1) \prec (x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1$

Donc : si $x \succ 1$ alors $-x+2 \prec (x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1$

3) Soit $x \prec 1$; On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x \Rightarrow \frac{1}{x-1}-1 \prec E\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq \frac{1}{x-1}$

On a : $x-1 \prec 0 \Rightarrow (x-1)\frac{1}{x-1} \leq (x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq (x-1)\left(\frac{1}{x-1}-1\right)$

Donc : $1 \leq (x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1-(x-1)$

Donc : si $x \prec 1$ alors : $1 \leq (x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq -x+2$

Exercice18 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) Montrer que : $\begin{cases} f(x)=x^2+1 & si\ |x|<1 \\ f(x)=x^2-1 & si\ |x| \geq \sqrt{2} \end{cases}$

3)Déterminer le Tableau de variations de f si $|x|<1$ et si $|x| \geq \sqrt{2}$ et tracer la courbe (C_f)

4) Discuter graphiquement selon les valeurs du paramètre m le nombre des solutions de l'équation $f(x)=m$

Solution : $f(x)=x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)$

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / 1-E(x^2)\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R} / E(x^2)\neq 1\}=\{x\in\mathbb{R} / x^2\notin[1;2[\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / x\notin\left]-\sqrt{2};-1\right]\ ou\ x\notin\left[1;\sqrt{2}\right[\ \right\}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $D_f = \left]-\infty;-\sqrt{2}\right] \cup \left]-1;1\right[\cup \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

2) $\rightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1 \Leftrightarrow 0 \le x^2 < 1 \Leftrightarrow E\left(x^2\right)=0 \Leftrightarrow E\left(x^2\right)=0 \Leftrightarrow f(x)=x^2+E\left(\frac{1}{1-0}\right)$

$|x|<1 \Leftrightarrow f(x)=x^2+E(1) \Leftrightarrow f(x)=x^2+1$

$|x| \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 \ge 2 \Leftrightarrow E\left(x^2\right) \ge E(2) \Leftrightarrow E\left(x^2\right) \ge 2 \Leftrightarrow -E\left(x^2\right) \le -2$

$\Leftrightarrow 1-E\left(x^2\right) \le 1-2 \Leftrightarrow 1-E\left(x^2\right) \le -1 < 0 \Leftrightarrow -1 \le \frac{1}{1-E\left(x^2\right)} < 0$

$\Leftrightarrow E\left(\frac{1}{1-E\left(x^2\right)}\right) = -1 \Leftrightarrow f(x)=x^2+E(-1) \Leftrightarrow f(x)=x^2-1$

Donc : $\begin{cases} f(x)=x^2+1 & si\ \ |x|<1 \\ f(x)=x^2-1 & si\ \ |x| \ge \sqrt{2} \end{cases}$

3)Construction la courbe de f :

Si : $f(x)=x^2+1 \quad si\ \ |x|<1$

$si\ \ |x|<1$: On a f est une fonction polynôme : $\left(h(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$; $b=0$ et $c=1$

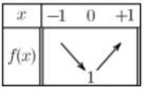
Donc $\alpha=-\frac{0}{2a}=0$ et $f(\alpha)=f(0)=0^2+1=2$

Alors : la courbe$\left(C_h\right)$ c'est une partie d'une parabole de sommet $W(\alpha;h(\alpha))$ c'est à dire : $W(0;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=0$

Comme : $\boxed{a=1>0}$ alors :

La fonction h est croissante sur $\left[0;1\right[$ et décroissante sur $\left]-1;0\right]$

Tableau de variations de f $si\ \ |x|<1$: On a $a=1>0$ donc :



$si\ \ |x| \ge \sqrt{2}$: $f(x)=x^2-1 \quad si\ \ |x| \ge \sqrt{2}$

On a f est une fonction polynôme : $\left(h(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$; $b=0$ et $c=-1$

Donc $\alpha=-\frac{0}{2a}=0$ et $f(\alpha)=f(0)=0^2+1=2$

Alors : la courbe$\left(C_h\right)$ c'est une partie d'une parabole de sommet: $W'(0;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=0$

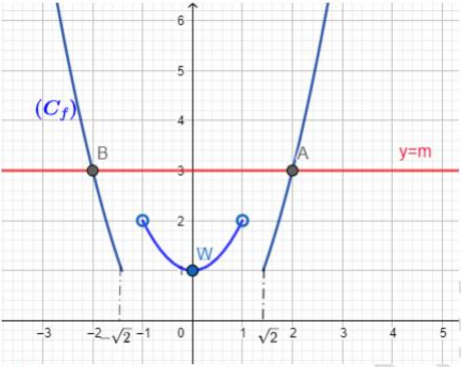
Comme : $\boxed{a=1>0}$ alors :

La fonction f est croissante sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$

Tableau de variations de f $si\ \ |x| \ge \sqrt{2}$: On a $a=1>0$ donc :

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	▨	1	↗



4) Discutons graphiquement selon les valeurs du paramètre m le nombre des solutions de l'équation $f(x)=m$

Nombre de solutions de $f(x)=m$ c'est le nombre de points d'intersections de la courbe avec la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m.

Si $m<1$: pas de solution

Si $m=1$: l'équation $f(x)=m$ admet trois solutions : $x=-\sqrt{2}$; $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$

Si $1<m<2$: l'équation $f(x)=m$ admet quatre solutions

Si: $m\geq 2$ l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions

Exercice19 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-E(x)}}{x^2}$

1) Déterminer : D_f

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$; $0\leq f(x)\leq \dfrac{1}{x^2}$

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^{-*}$; $0\leq f(x)\leq \dfrac{\sqrt{1-2x}}{x^2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB