1er BAC Sciences math BIOF

Série N°13 : Généralités sur les fonctions

(La correction voir☺ http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{2x^4}{x^2-4}$ 2) $f(x)=\frac{x+5}{x^2-5x+7}$ 3) $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$ 4) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$

5) $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5}}$ 6) $f(x)=\sqrt{\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}}$ 7) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$

8) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ 9) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

Exercice2 : soit f une fonction définie par : $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f

2) Montrer que f est périodique de période $T=\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

Exercice3 : Soit f une fonction définie par : $f(x)=4\sin x+\cos 2x$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f

2) Montrer que f est périodique de période $T=2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

Exercice4 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+6x-2$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$ Montrer que : $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2+6$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur : $I=[-3;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur : $J=]-\infty;-3]$

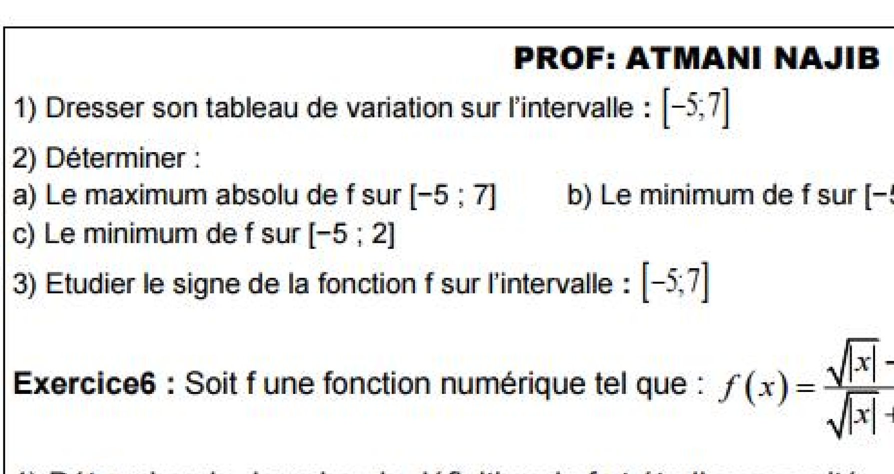
4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : f est minorée sur $\mathbb{R}$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-2;2]$ On a : $-10\leq f(x)\leq 14$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-6;-4]$ On a : $-10\leq f(x)\leq -2$

Exercice5 : Soit la fonction définie par la représentions graphique suivante sur l'intervalle : $[-5;7]$



1) Dresser son tableau de variation sur l'intervalle : $[-5;7]$

2) Déterminer :

a) Le maximum absolu de f sur [−5 ; 7] b) Le minimum de f sur [−5 ; 7]

c) Le minimum de f sur [−5 ; 2]

3) Etudier le signe de la fonction f sur l'intervalle : $[-5;7]$

Exercice6 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}-2}{\sqrt{|x|}+2}$

1) Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité.

2) Etudier les variations de f.

3) a) Montrer que pour tout x dans IR on a : −1 ≤ f (x) < 1

b) Montrer que -1 est le minimum absolu de f, et que f n'admet pas de maximum absolu.

4) Montrer que f est une bijection de : $\mathbb{R}^+$ vers [− 1,1 [, puis déterminer sa bijection réciproque.

Exercice7 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ tel que : $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}$

1) Montrer que -1 est le minimum absolu de f

2) Montrer que la fonction f n'est pas majorée.

Exercice8 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}$

(C_f) Sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que : f est impaire

3)a) Montrer que la courbe représentative de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ est une portion d'une hyperbole que l'on précisera

b) En déduire une méthode pour tracer la courbe (C_g) de fonction g

4)Etudier les variations de de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ puis donner le tableau de variation de f sur D_f

5) Construire (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice9 : Soit g la fonction définie par : $g(x)=\frac{1}{2-x}$ et (C_g) La courbe représentative de g

1)a) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

b) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $g(x)=x$ et $g(x)=1+x$

b) Donner une interprétation graphique des résultats

c) Déterminer le signe de : m^2+4m

d) Déterminer les valeurs de m ou la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points

3) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}$

a) Déterminer D_f

b) Montrer : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$ $si\ x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

c) En déduire la monotonie de f dans : $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

d) Calculer : $f(x)+\frac{2}{3}$ puis en déduire que $-\frac{2}{3}\leq f(x)$; si $x\in\mathbb{R}$

e) Montrer que : si $x\in\mathbb{R}$ alors : $-\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$

Exercice10 : Soit la fonction h définie sur $[1;+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{x^3-1}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.

2) Déterminer les variations de h.

Exercice11 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+x+6$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x)\geq\frac{1}{2}$

3) Etudier la monotonie de $f\circ f$ sur $\mathbb{R}$

4) Calculer $(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Exercice12 : Soient f et g les trois fonctions définies par : $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

3) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;5)$

b) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) a) Etudier graphiquement le signe de la fonction g

b) Etudier algébriquement le signe de la fonction g

6) a) Résoudre graphiquement de l'équation $f(x)=g(x)$:

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

7)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

a) Déterminer D_h

b) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)$ $\forall x\in D_h$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $]1;+\infty[$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

Exercice13 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x+1}$ et $f(x)=\frac{x}{x+2}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer D_h tel que : $h=g\circ f$

2) Déterminer les tableaux de variations de f et g

3) a) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Résoudre graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'inéquation : $x>(x+2)\sqrt{x+1}$

4) Étudier les variations de h sur : $]-\infty;-2[$ et $[-1;+\infty[$

5) Calculer $h(x)=(g\circ f)(x)$ $\forall x\in D_h$

Exercice14 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

1) ä) Montrer que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=1+(g(x))^2$ où g est une fonction à déterminer

b) En déduire que : f est minorée sur D_f

c) f admet-elle un minimum absolu ? justifier

d) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et tracer (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Vérifier que : $f(x)=(h\circ g)(x)$ $\forall x\in D_f$

b) Etudier le signe de la fonction g sur D_g

3) Etudier la monotonie de f dans les intervalles : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $]1;+\infty[$

4) Dresser le tableau de variation de f et déterminer les extrémums de la fonction f.

Exercice15 : Soit f une fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ tel que : $f(x)=x-2\sqrt{x-1}-1$

1) Déterminer $A=f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$ et en déduire que f n'est pas injective.

2) On considère les deux fonctions : $u(x)=x^2-2x$ et $v(x)=\sqrt{x-1}$

a) Démontrer que : $f(x)=(u\circ v)(x)$; $\forall x\in[1;+\infty[$

b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation

c) En déduire que f n'est pas surjective de $[1;+\infty[$ vers IR .

3) Déterminer le maximum absolu de la fonction : $g(x)=\frac{1}{x}\left(1-2\sqrt{x-x^2}-1\right)$ sur l'intervalle $\left[\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right]$

Exercice16 : soit f une fonction définie par : $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

2) Etudier la parité de f

3) Vérifier que 2π est une période pour la fonction f

4) En déduire un domaine d'étude de f

5) Déterminer les points d'intersections de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

6) Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation : $f(x)\geq 0$

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-3\pi;3\pi]$

Exercice17 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-1)\times E\left(\frac{1}{x-1}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) Montrer que :si $x\succ 1$ alors : $-x+2\prec(x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq 1$

3) Montrer que :si $x\prec 1$ alors : $1\leq(x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq -x+2$

Exercice18 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) Montrer que : $\begin{cases} f(x)=x^2+1 & si\ |x|<1 \\ f(x)=x^2-1 & si\ |x|\geq\sqrt{2} \end{cases}$

3)Déterminer le Tableau de variations de f si $|x|<1$ et si $|x|\geq\sqrt{2}$ et tracer la courbe (C_f)

4) Discuter graphiquement selon les valeurs du paramètre m le nombre des solutions de l'équation $f(x)=m$

Exercice19 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{|x|-E(x)}}{x^2}$

1) Déterminer : D_f

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$; $0\leq f(x)\leq\frac{1}{x^2}$

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^{-*}$; $0\leq f(x)\leq\frac{\sqrt{1-2x}}{x^2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB