http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°9 : Généralités sur les fonctions

Exercice1 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x}$

1)a) Déterminer D_f

b) Calculer : $f(0)$; $f(-1)$

c) Déterminer les antécédents de 0 et $\sqrt{6}$ par f (s'ils existent)

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-2x^2+4x+6}$ Montrer que : $f=g$

Solution : 1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x+2\geq 0 \;\; et \;\; 3-x\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1 \; et \; x\leq 3\}$ Donc $D_f=[-1,3]$

b) Calcul des images :

$f(0)=\sqrt{2\times 0+2}\times\sqrt{3-0}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

et $f(-1)=\sqrt{2\times(-1)+2}\times\sqrt{3-(-1)}=\sqrt{0}\times\sqrt{4}=0$

c)

- x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à: $\sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x}=0$

Équivaut à : $\sqrt{2x+2}=0$ ou $\sqrt{3-x}=0$

Équivaut à : $2+2x=0$ ou $3-x=0$

Équivaut à : $x=-1$ ou $x=3$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : -1 et 3.

- x est l'antécédents de $\sqrt{6}$ par f signifie que $\sqrt{6}$ est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=\sqrt{6}$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\sqrt{6}$

Équivaut à : $\sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x}=\sqrt{6}$

Équivaut à : $(2x+2)(3-x)=6$

Équivaut à : $6x-2x^2+6-2x=6$

Équivaut à : $-2x^2+4x=0$

Équivaut à : $-2x(x-2)=0$

Équivaut à : $-2x=0$ ou $x-2=0$

Équivaut à: $x=0$ ou $x=2$

Finalement les antécédents de $\sqrt{6}$ par f sont : 0 et 2

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-2x^2+4x+6}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+4x+6\geq 0\}$

PROF: ATMANI NAJIB

Soit Δ son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times(-2)\times 6 = 16+48 = 64 > 0$

$x_1 = \frac{-4+\sqrt{64}}{2\times -2} = \frac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times -2} = \frac{-12}{-4} = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-2x^2+4x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_g = [-1,3]$

On a donc : $D_f = D_g$.

$f(x) = \sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x} = \sqrt{(2x+2)(3-x)} = \sqrt{-2x^2+6x+6-2x} = \sqrt{-2x^2+4x+6} = g(x)$

Conclusion : $f = g$

Exercice2 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = \frac{x^4-2025}{6x^2-x-1}$ 2) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2-4x}$ 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

4) $f(x) = \frac{3x^2+|x|-1}{\sqrt{16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}}}$ 5) $f(x) = \sqrt{\frac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}}$ 6) $f(x) = \sqrt{2|x|-3}$

Solution : 1) $f(x) = \frac{x^4-2025}{6x^2-x-1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 6x^2 - x - 1 \neq 0\}$

$6x^2 - x - 1$: On a : $\Delta = 1+24 = 25$: $x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2-4x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+1 \geq 0 \ \ et \ \ 2-4x \neq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2-4x \neq 0\}$ car $x^2+1 \geq 0$ (toujours vraie)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -4x \neq -2\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{-2}{-4}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{1}{2}\right\}$

D'où : $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0 \ \ et \ \ x \neq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1 \ \ et \ \ x \neq 0\}$

$D_f = [-1;+\infty[- \{0\} = [-1;0[\cup]0;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

4) $f(x)=\dfrac{3x^2+|x|-1}{\sqrt{16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}}}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}\geq 0\right\}$

Calculons le discriminant du trinôme $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$: $a=16$; $b=-\frac{8}{3}$; $c=\frac{1}{9}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\frac{8}{3}\right)^2-4\times 16\times\frac{1}{9}=\frac{64}{9}-\frac{64}{9}=0$

Comme $\Delta=0$, trinôme possède une seule racine (dite double) : $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{8}{3}}{2\times 16}=\frac{1}{12}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{12}$		$+\infty$
$16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$		$+$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty;\frac{1}{12}\right[\cup\left]\frac{1}{12};+\infty\right[$

5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}\geq 0 \text{ et } 2x^2+x-5\neq 0\right\}$

Il faut étudier le signe du numérateur et du dénominateur puis regrouper les résultats dans un tableau de signes. Pour le numérateur : $\Delta=1^2-4\times(-1)\times 5=1+20=21$;

Delta est positif donc l'équation du deuxième degré possède deux solutions :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{21}}{-2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}\simeq 2,8$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{21}}{-2}=\frac{1-\sqrt{21}}{2}\simeq -1,8$

Le coefficient devant x² est négatif donc le numérateur est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines. De même, pour le dénominateur : $\Delta=1^2-4\times(-5)\times 2=1+40=41$

Donc : $x_1'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{41}}{4}\simeq -1,9$ et $x_2'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{41}}{4}\simeq 1,4$

Le coefficient devant x² est positif donc le dénominateur est négatif entre ses racines.

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x^2+x-5$		$+$	0	$+$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-x^2+x+5}{2x^2+x-5}$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $D_f = \left]\frac{-1-\sqrt{41}}{4};\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left]\frac{-1+\sqrt{41}}{4};\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

6) $f(x) = \sqrt{2|x|-3}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2|x| - 3 \geq 0\}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / |x| \geq \frac{3}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{3}{2} \text{ ou } x \leq -\frac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f = \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

Exercice3 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par

1) $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{x}$. 2) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ 3) $f(x) = |x| - \frac{1}{x^2}$

Solution : 1) $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors : $-x \in \mathbb{R}^*$
- $f(-x) = 3(-x)^3 - \frac{1}{-x} = -3x^3 + \frac{1}{x} = -3\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)$

$f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

2) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

On a $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

On a : $-2 \in D_f$ mais $-(-2) = 2 \notin D_f$

Donc : D_f n'est pas symétrique par rapport a O

Donc : f est une fonction ni paire ni impaire

3) $f(x) = |x| - \frac{1}{x^2}$: On a $f(x) \in \mathbb{R}$ Équivaut à: $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $f(-x) = |-x| - \frac{1}{(-x)^2} = |x| - \frac{1}{x^2}$ donc : $m(-x) = m(x)$

Donc f est une fonction paire,

Exercice4 : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 3|x| + 2 & si\ |x| > 1 \\ f(x) = x^2 - 2|x| & si\ |x| \leq 1 \end{cases}$

Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

Solution : ☞ Si : $|x| \leq 1$ alors : $|-x| \leq 1$

Donc : $f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| = x^2 - 2|x| = f(x)$

☞→Si : $|x| > 1$ alors : $|-x| > 1$

Donc : $f(-x) = 3|-x| + 2 = 3|x| + 2 = f(x)$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $f(-x)=-f(x)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(-x)=f(x)$ par suite : f est une fonction paire,

Alors : la droite des ordonnées est un axe de symétrie de (C_f)

Il suffit donc de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

C'est-à-dire : le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

Exercice5 : Soit la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{|x|\sin x}{\cos x-3}$;

(C_f) La courbe de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Montrer que : O est un centre de symétrie de (C_f)

Solution : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\cos x-3\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\cos x\neq 3\}$ comme : $-1\leq\cos x\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

Il suffit de montrer que f est une fonction impaire

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\dfrac{|-x|\sin(-x)}{\cos(-x)-3}=-\dfrac{-|x|\sin x}{\cos x-3}=-f(x)$ car $\sin(-x)=-\sin x$ et $\cos(-x)=\cos x$

Donc f est une fonction impaire

Par suite : O est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice6 : Etudier les variations de la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et dresser son tableau de variations

Solution : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$: On a $x\in D_g\Leftrightarrow x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

Soient : $x_1\in D_g$ et $x_2\in D_g$ tel que : $x_1\neq x_2$; on a : $T(x_1;x_2)=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a) Sur $I=]-\infty;-1[$: Soit $x_1\in]-\infty;-1[$ et $x_2\in]-\infty;-1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec -1$ et $x_2\prec -1$ Donc $x_1+1\prec 0$ et $x_2+1\prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $I=]-\infty;-1[$

D'où g est strictement croissante sur $I=]-\infty;-1[$

b) Sur $J=]-1;+\infty[$: Soit $x_1\in]-1;+\infty[$ et $x_2\in]-1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc $x_1 \succ -1$ et $x_2 \succ -1$

Donc $x_1+1 \succ 0$ et $x_2+1 \succ 0$

Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$ sur $J=]-1;+\infty[$:

D'où : g est strictement croissante sur $J=]-1;+\infty[$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

Exercice7 : 1) À partir du tableau de variation de la fonction f, compléter les égalités ou inégalités suivantes

a) Pour x ∈ [−8 ; 4], $f(x) \geq \ldots\ldots$

b) Pour x ∈ [−8 ; 4], $f(x) \leq \ldots\ldots$

c) Pour x ∈ [2,8 ; 3,3], $f(x) \leq \ldots\ldots$

2) a) Donner un encadrement de la fonction f sur l'intervalle [−8 ; 4].
b) Donner un encadrement de la fonction f sur l'intervalle [−7,4 ; −6,3].

x	-8		-7		-6		-5		-3		-2		1		3		4
$f(x)$	2	→	2	↘	0	↘	-4	↗	0	↗	4	↘	0	↘	-2	↗	0

Solution : 1) a) Pour x ∈ [−8 ; 4], $f(x) \geq -4$

b) Pour x ∈ [−8 ; 4], $f(x) \leq 4$

c) Pour x ∈ [2,8 ; 3,3], $f(x) \leq 0$

2) a) Sur [−8 ; 4], $-4 \leq f(x) \leq 4$.

b) Sur [−7,4 ; −6,3], $0 \leq f(x) \leq 2$.

Exercice8 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2+4x-3$

Montrer que 1 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x) \leq 1$ et que l'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$$f(x)-1=-x^2+4x-3-1=-x^2+4x-4=-(x^2-4x+4)=-(x-2)^2 \leq 0$$

Donc $f(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)-1=0 \Leftrightarrow -(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc : 'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(2)=1$ donc : $f(x)\leq f(2)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(2)=1$ est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice9 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f 2) Démontrer que f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}^+$

3) Démontrer que f est minorée par $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^+$ on a $x+\sqrt{x}\geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$ donc $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\geq 0$

Donc : $0\leq f(x)$ si $x\in\mathbb{R}^+$

Donc : f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}^+$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}\geq 0$

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$: $\frac{1}{\sqrt{x}}>0$ donc $1+\frac{1}{\sqrt{x}}>1$

Donc : $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}>1$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1>2$

Donc : $\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}<\frac{1}{2}$ par suite : $f(x)<\frac{1}{2}$ rt on a : $f(0)=0<\frac{1}{2}$

Donc : si $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)<\frac{1}{2}$

Donc : f est minorée par $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$

Conclusion : $0<f(x)<\frac{1}{2}$ si $x\in\mathbb{R}^+$: f est bornée sur $\mathbb{R}^+$

Exercice10 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $2x-\sqrt{x}+1>0$

PROF: ATMANI NAJIB

b) Déduire que : $D_f=\mathbb{R}^+$

2) a) Montrer que : la fonction f est minorée ; 0 est-elle valeur minimale de f ?

b) Montrer que 2 est la valeur maximale de f

Solution : 1) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \;;\; 2x-\sqrt{x}+1>0$

Soit $x\in\mathbb{R}^+$:

$$2x-\sqrt{x}+1=2\sqrt{x}^2-\sqrt{x}+1=2\left(\sqrt{x}^2-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)+1=2\left(\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)+1$$

$2x-\sqrt{x}+1=2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$ car : $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)^2\geq 0$ et $\frac{7}{8}>0$

b) Déduisons que : $D_f=\mathbb{R}^+$

$$f(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}$$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^+ \; et \;\; 2x-\sqrt{x}+1\neq 0$ comme : $2x-\sqrt{x}+1>0$ alors : $2x-\sqrt{x}+1\neq 0$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^+$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^+$

2) a) Montrons que : la fonction f est minorée

Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}>0$ car $2\sqrt{x}+1>0$ et $2x-\sqrt{x}+1>0$

Donc : la fonction f est minorée par 0

Mais : $f(x)\neq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}^+$ par suite :0 n'est pas valeur minimale de f

b) Montrons que 2 est la valeur maximale de f : Soit $x\in\mathbb{R}^+$:

$$2-f(x)=2-\frac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{4x-2\sqrt{x}+2-2\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{4x-4\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{\left(2\sqrt{x}\right)^2-4\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)^2}{2x-\sqrt{x}+1}\geq 0$$

Car : $\left(2\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$ et $2x-\sqrt{x}+1>0 \;:\forall x\in\mathbb{R}^+$

$$f(x)=2\Leftrightarrow 2-f(x)=0\Leftrightarrow\frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)^2}{2x-\sqrt{x}+1}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \;;\; f(x)\leq f\left(\frac{1}{4}\right)=2$

PROF. ATMANI NAJIB

Par suite : $f\left(\frac{1}{4}\right)=2$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}^+$:

Exercice11 : On considère les fonctions : $f(x)=x^2-2x+1$ et $g(x)=\frac{3x-3}{x+1}$

(C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

3)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

4)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

5)Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

7)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq g(x)$

8)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{3|x|-3}{|x|+1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h

b) Montrer que la fonction h est paire

c)Vérifier que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

9)Tracer la courbes (C_h) de h dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

10)Soit K la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Solution : 1) a) On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=1$ $f(x)=x^2-2x+1$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times 1}=1$ et $\beta=f(\alpha)=f(1)=(1)^2-2\times 1+1=0$

Ainsi : dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet : $W(\alpha;\beta)$ soit $W(1;0)$

et d'axe de symétrie la droite $x=1$

$a=1>0$ donc :

PROF. ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

2) $g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

On utilisant un résumé de notre cours :

Si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

1iér cas : si $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$ Avec : $a=3$; $b=-3$; $c=1$; $d=1$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-1;3)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-\dfrac{1}{1}=-1$ et $y=\dfrac{3}{1}=3$; $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\times 1-(-3)\times 1=6>0$

Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		↗	‖	↗	

3)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère : $f(x)=x^2-2x+1$

a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x-1=0$ Signifie : $(x-1)^2=0$ Signifie : $x-1=0$ Signifie : $x=1$

Donc : le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$

Donc : $(C_f)\cap(ox)=\{A(1,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times 0+1=1$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

Donc : $(C_f)\cap(oy)=\{B(0,1)\}$

4)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

Les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $g(x)=0$

$g(x)=0$ Signifie : $\frac{3x-3}{x+1}=0$ et $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Signifie : $3x-3=0$ Signifie : $x=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$

Donc : $(C_g)\cap(ox)=\{A(1;0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a : $g(0)=\frac{3\times0-3}{0+1}=\frac{-3}{1}=-3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées est : $C(0;-3)$

Donc : $(C_g)\cap(oy)=\{C(0;-3)\}$

5)Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$

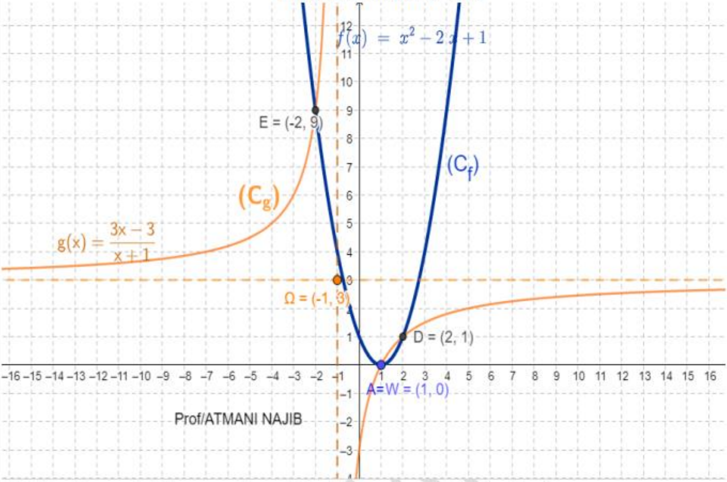
La courbe (C_g) : $g(x)=\frac{3x-3}{x+1}$

-4	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	1	2
5	6	9	▨	-3	0	1

La courbe (C_f) : $f(x)=x^2-2x+1$

x	1	2	3
$f(x)$	0	1	4

PROF: ATMANI NAJIB



6) Déterminons algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{-1\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie que : $x^2-2x+1=\frac{3x-3}{x+1}$

Signifie que : $(x-1)^2-\frac{3(x-1)}{x+1}=0$

Signifie que : $(x-1)\left(x-1-\frac{3}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\frac{(x-1)(x+1)-3}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\frac{x^2-1-3}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\frac{x^2-4}{x+1}\right)=0$

PROF: ATMA

Signifie que : $(x-1)\left(\dfrac{x^2-2^2}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)}{x+1}=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Signifie que : $(x-1)(x-2)(x+2)=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Signifie que : $x-1=0$ ou $x-2=0$ ou $x+2=0$ Signifie que : $x=1$ ou $x=2$ ou $x=-2$

Et par suite : $(C_f)\cap(C_g)=\{A(1,0);E(-2,9);D(2,1)\}$

7)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq g(x)$

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f) est au-dessus de (C_g)

Donc : graphiquement : $S=\left]-\infty,-2\right]\cup\left]-1,1\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

8)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{3|x|-3}{|x|+1}$

a) Déterminons l'ensemble de définition D_h : $D_h=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|+1\neq 0\}$

$|x|+1=0$ Signifie $|x|=-1$ impossible

Donc : $D_h=\mathbb{R}$

b) Montrons que la fonction h est paire

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $h(-x)=\dfrac{3|-x|-3}{|-x|+1}=\dfrac{3|x|-3}{|x|+1}=h(x)$ C'est à dire : $h(-x)=h(x)$

Donc h est une fonction paire,

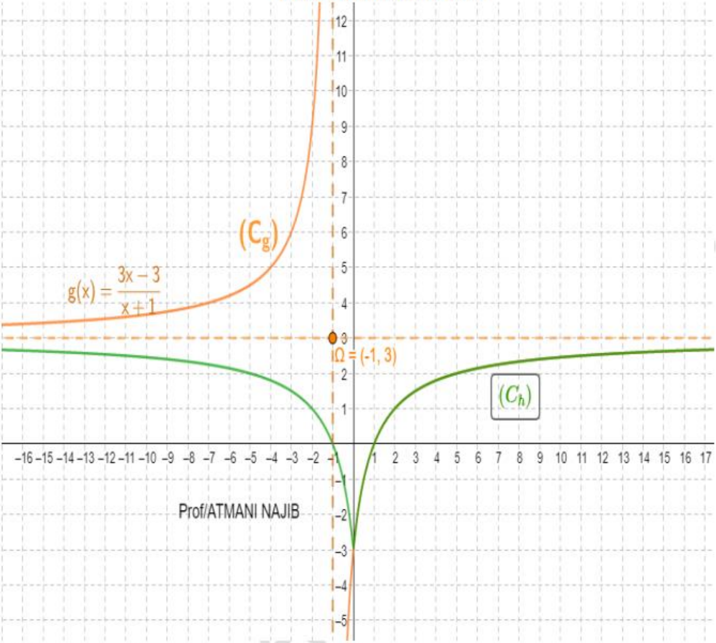
c)Vérifions que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

Soit : $\mathbb{R}^+$ on a : $h(x)=\dfrac{3|x|-3}{|x|+1}=\dfrac{3x-3}{x+1}=g(x)$ car $|x|=x$

Donc : $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

9) Représentation de la courbes (C_h) de h dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

PROF: ATMANI NAJIB

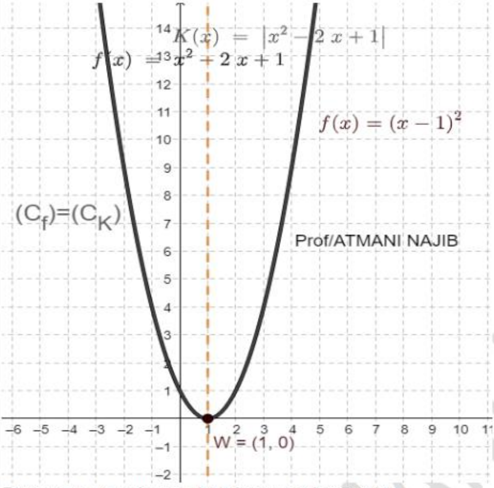


10)Soit K la fonction définie par : $K(x) = |f(x)|$

a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

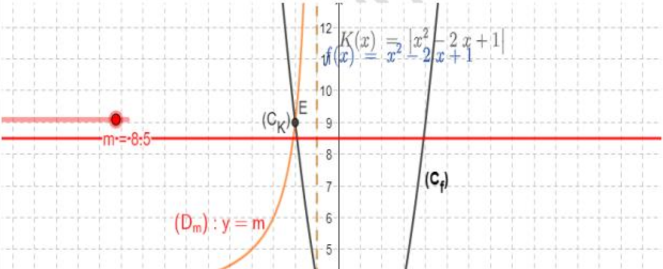
On a : $K(x) = |f(x)| = f(x)$ car $f(x) = (x-1)^2 \geq 0$

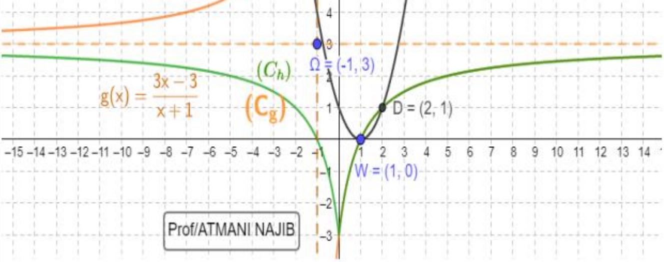
Donc : (C_f) et (C_K) sont confondues



NAJIB

Remarque : tous les courbes dans un même repère :





b) Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Le nombre de solutions de l'équation $K(x)=m$:est le nombre de points d'intersection de (C_K) et la droite (D_m) d'équation : $(D_m)\quad y=m$

- ▹ Si $m<0$: l'équation n'a pas de solutions
- ▹ Si $m=0$: l'équation admet une seule solution
- ▹ Si $m>0$: l'équation admet deux solutions

Exercice12 : soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f

2) Montrer que : f est périodique de période $T=2\pi$

2) Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$ car $2+\cos x\neq 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

2) Un domaine d'étude de f

a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\pi+x\in\mathbb{R}$

$$f(2\pi+x)=\frac{\sin(2\pi+x)}{2+\cos(2\pi+x)}=\frac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T=2\pi$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=2\pi$ donc par exemple : $D=[-\pi;\pi]$

Etudions la parité de f ?

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-\frac{\sin x}{2+\cos x}=-f(x)$$

Donc f est impair

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E=[0;\pi]$

Exercice13 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ et périodique de période $T=1$

Tel que : $f(x)=\frac{1}{x^2}$ si $x\in]0;1[$

PROF. ATMANI NAJIB

1) Calculer : $f(0{,}1)$; $f(-2025{,}09)$; $f(2020{,}2)$

2) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k =]k;k+1[$ $k \in \mathbb{Z}$

Solution : 1) Puisque : $0{,}1 \in]0;1[$ Alors : $f(0{,}1) = \frac{1}{(0{,}1)^2} = \frac{1}{0{,}01} = 100$

$\rightarrow f(-2025{,}09) = f(-2026+0{,}1) = f(-2026\times 1+0{,}1) = f(0{,}1)$ car f est périodique de période $T = 1$;

En effet : $f(k\times T + x) = f(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $f(-2025{,}09) = f(0{,}1)$ et puisque : $0{,}1 \in]0;1[$

Alors : $f(-2025{,}09) = f(0{,}1) = \frac{1}{(0{,}1)^2} = \frac{4}{3}$

$\rightarrow f(2020{,}2) = f(2020+0{,}2) = f(2020\times 1+0{,}2) = f(0{,}2)$ car f est périodique de période $T = 1$;

En effet : $f(k\times T + x) = f(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $f(2020{,}2) = f(0{,}2)$ et puisque : $0{,}2 \in]0;1[$

Alors : $f(2020{,}2) = f(0{,}2) = \frac{1}{(0{,}2)^2} = \frac{1}{25}$

3) L'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k =]k;k+1[$ $k \in \mathbb{Z}$

$x \in I_k =]k;k+1[\Leftrightarrow k < x < k+1$

$x \in I_k \Leftrightarrow 0 \prec x-k \prec 1 \Leftrightarrow f(x-k) = \frac{1}{(x-k)^2}$

Or : f est périodique de période $T = 1$ alors : $f(x-k) = f(x-k\times 1) = f(x)$

Donc : $f(x) = \frac{1}{(x-k)^2}$ si $x \in]k;k+1[$ $k \in \mathbb{Z}$

Exercice14 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x|x| - 4x + 3$

1) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$-x|x| + 4x - 3 + m = 0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Solution : 1) a) ☞ sur $\mathbb{R}^+$:

Soit : $x \in \mathbb{R}^+$ alors : $|x| = x$

Donc : $f(x) = x^2 - 4x + 3$:f est une fonction polynôme : $(f(x) = ax^2 + bx + c)$

On a : $a = 1$; $b = -4$ et $c = 3$

Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\times 1} = 2$ et $f(2) = 2^2 - 4\times 2 + 3 = -1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une partie de la parabole de sommet $W(\alpha; f(\alpha))$ c'est à dire :

PROF: ATMANI NAJIB

$W(2;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=2$

b) ☛ sur $\mathbb{R}^-$:

Soit : $x \in \mathbb{R}^-$ alors : $|x| = -x$

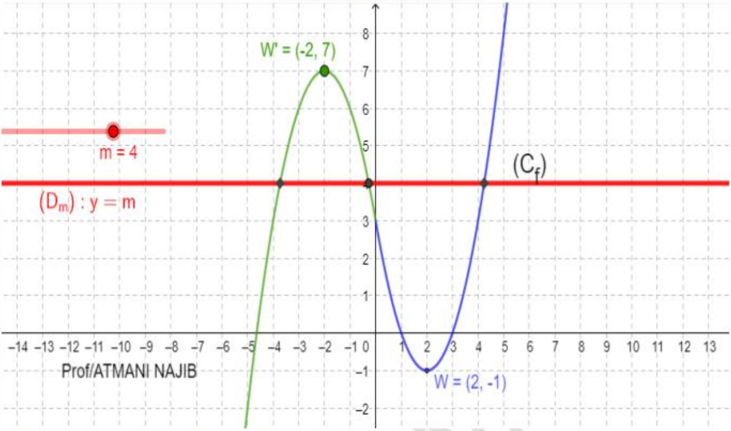
Donc : $f(x) = -x^2 - 4x + 3$:f est une fonction polynôme : $(f(x) = ax^2 + bx + c)$

On a : $a=-1$; $b=-4$ et $c=3$

Donc $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\times(-1)} = -2$ et $f(-2) = -(-2)^2 - 4\times(-2) + 3 = 7$

Alors : la courbe (C_f) c'est une partie de la parabole de sommet $W(\alpha; f(\alpha))$ c'est à dire :

$W(-2;7)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=-2$



2) Résolution graphique de l'équation $-x|x| + 4x - 3 + m = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$:

$-x|x| + 4x - 3 + m = 0$ Signifie $m = x|x| - 4x + 3$

Signifie : $m = f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y = m$

Si: $m > 7$ ou $m < -1$ il y'a une solution

Si: $m = 7$ ou $m = -1$ il y'a deux solutions

Si: $-1 < m < 7$ il y'a une trois solutions

Exercice15 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

1) Démontrer que f est majorée par 2 et minorée par $-\frac{1}{2}$

2) On pose : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \ ;\ u(x)=\sqrt{x}$

a) Déterminer la fonction v telle que : $f=v\circ u$

b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

Solution :1) $D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x)\le 2$ et $-\frac{1}{2}\le f(x)$ dans $\mathbb{R}^+$

$$f(x)-2=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-2=\frac{-5}{\sqrt{x}+2}\prec 0$$

Donc : $f(x)<2$ dans $\mathbb{R}^+$

Donc : f est majorée par 2

$$f(x)+\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\ge 0$$

Donc : $-\frac{1}{2}\le f(x)$ dans $\mathbb{R}^+$

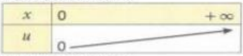
Donc : f est minorée par $-\frac{1}{2}$

2)a) Déterminer la fonction v telle que : $f=v\circ u$

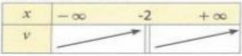
On a : $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=\frac{2u(x)-1}{u(x)+2}$; on pose $v(x)=\frac{2x-1}{x+2}$

Donc $f(x)=(v\circ u)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

▸ Tableau de variation de u



▸ Tableau de variation de v



- Puisque u est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
- si $x\in[0;+\infty[$ $u(x)\ge 0$ alors : $u(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$
- v est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Alors $f=v\circ u$ est décroissante sur $[0;+\infty[$

Exercice16 : Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=\frac{5x-11}{4x-4}$ et $g(x)=x^2-2x-1$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

PROF: ATMANI NAJIB

1)a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Déterminer D_f

c) Trouver les points d'intersections de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

2) a) Déterminer $a\ ;b\ et\ c$ tel que : $\forall x\in D_f\ :\ g(x)-f(x)=\dfrac{(x+1)(ax^2+bx+c)}{4x-4}$

b) Déterminer les points d'intersections de (C_f) et (C_g)

3)Tracer Les courbes représentatives (C_f)et (C_g)dans le même repère en précisant les points d'intersections

4)a) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x)>f(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\times g(x)\geq 0$

5) Déterminer : $D_{g\circ f}$ et les variations de $g\circ f$

---

6) Soit la fonction définie par : $h(x)=|g(x)|$

Tracer La courbes représentatives (C_h) de h dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (avec une autre couleur)

Solution : 1) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation : $f(x)=0$.

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{5x-11}{4x-4}=0\Leftrightarrow 5x-11=0\Leftrightarrow x=\frac{11}{5}$$

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $C\left(\frac{11}{5};0\right)$

b) $f(x)=\dfrac{5x-11}{4x-4}$; on a $f(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 4x-4\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

c) Les points d'intersections de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\qquad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=4+4=8>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times1}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times1}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses sont :

$A(1+\sqrt{2};0)$et $B(1-\sqrt{2};0)$.

2) a) Soit $x\in D_f$: $g(x)-f(x)=x^2-2x-1-\frac{5x-11}{4x-4}=\frac{4x^3-12x^2-x+15}{4x-4}=\frac{(x+1)(4x^2-16x+15)}{4x-4}$

Donc : $a=4$; $b=-16$; $c=15$

b) Détermination des points d'intersections de (C_f) et (C_g) :

$$M(x;y)\in(C_f)\cap(C_g)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(4x^2-16x+15)}{4x-4}=0\Leftrightarrow (x+1)(4x^2-16x+15)=0\Leftrightarrow 4x^2-16x+15=0 \text{ ou } x=-1$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-16)^2-4\times4\times15=16>0$$

$$x_1=\frac{-(-16)+\sqrt{16}}{2\times4}=\frac{16+4}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-16)-\sqrt{16}}{2\times4}=\frac{16-4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

Donc : $(C_f)\cap(C_g)=\left\{E\left(\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right);F\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{4}\right);G(-1;2)\right\}$

3)Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:

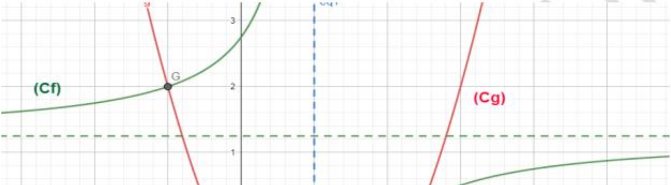
a) $f(x)=\frac{5x-11}{4x-4}$: (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(1;\frac{5}{4}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=\frac{5}{4}$

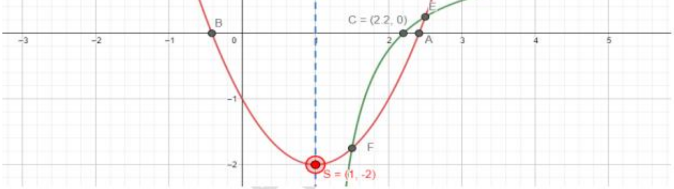
b) On a : $g(x)=x^2-2x-1$: g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=3$ $(g(x)=ax^2+bx+c)$

Donc $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times1}=1$ et $(f(1)=-2)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S(1;-2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$





4)a) Résolution graphique de l'inéquation : $g(x) \succ f(x)$

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

Donc : $S = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

4) b) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)\times g(x) \geq 0$

$f(x)\times g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \ \ et \ \ g(x) \geq 0$ ou $f(x) \leq 0 \ \ et \ \ g(x) \leq 0$

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ La courbe (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses $\Leftrightarrow x \in \left]-\infty;1\right[\cup \left[\frac{11}{5};+\infty\right[$

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses $\Leftrightarrow x \in \left]-\infty;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$

$f(x) \geq 0 \ et\, g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(\left]-\infty;1\right[\cup \left[\frac{11}{5};+\infty\right[\right) \cap \left(\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};+\infty\right[\right)$

$f(x) \geq 0 \ et\, g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};1\right[$

De la même façon : $f(x) \leq 0 \ et\, g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{11}{5};+\infty\right[$

Donc : $f(x)\times g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[\frac{11}{5};+\infty\right[\cup \left]1;1+\sqrt{2}\right]$

5) Détermination de : $D_{g\circ f}$ et les variations de $g\circ f$:

a) $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_f \ \ et \ \ f(x) \in D_g\}$

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1 \ \ et \ \ f(x) \in \mathbb{R}\}$

$D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Etude des variations de : $g\circ f$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	-2	↗

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

PROF
NI NAJIB

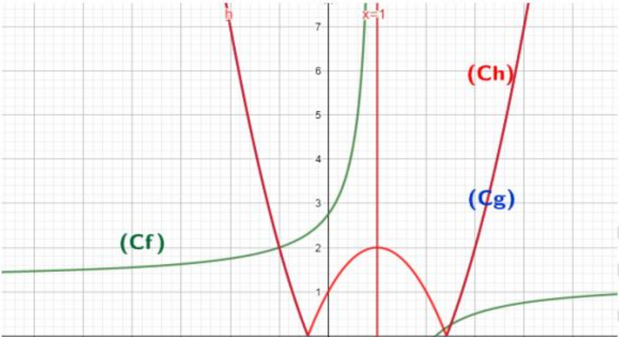
Pour l'étude des variations de $g\circ f$ on résoud l'équation : $f(x)=1$

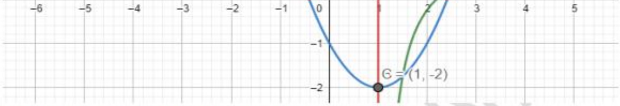
$f(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{5x-11}{4x-4}=1 \Leftrightarrow 5x-11=4x-4 \Leftrightarrow x=7$

- Puisque f est strictement croissante sur $[7;+\infty[$ et $f([7;+\infty[)=\left[1;\dfrac{5}{4}\right[$ et g est croissante sur $\left[1;\dfrac{5}{4}\right[$ alors $g\circ f$ est décroissante sur $[7;+\infty[$
- Puisque f est strictement croissante sur $]1;7]$ et $f(]1;7])=]-\infty;1]$ et g est décroissante sur $]-\infty;1]$ alors $g\circ f$ est décroissante sur $]1;7]$
- Puisque f est croissante sur $]-\infty;1[$ et $f(]-\infty;1[)=\left]\dfrac{5}{4};+\infty\right[$ et g est croissante sur $\left]\dfrac{5}{4};+\infty\right[$ alors $g\circ f$ est croissante sur $]-\infty;1[$

6) On a : $h(x)=|g(x)|$ donc : $\begin{cases} h(x)=g(x) & si\ g(x)\geq 0 \\ h(x)=-g(x) & si\ g(x)\leq 0 \end{cases}$

Donc : Les courbes (C_h) et (C_g) sont confondues si $g(x)\geq 0$ c'est-à-dire : si La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses et Les courbes (C_h) et (C_g) sont symétriques si $g(x)\leq 0$ c'est-à-dire : si La courbe (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses(voir figure)





Exercice17 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x+1-2\sqrt{x+1}$

1) Déterminer D_f et calculer $f(0)$ et $f(1)$

2) a) Vérifier que : $1+f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$; $\forall x\in D_f$

b) En déduire que f admet une valeur minimale absolue à déterminer

3) Soient U et V deux fonctions définies par : $U(x)=x^2-2x$ et $V(x)=\sqrt{x+1}$

a) Dresser le tableau de variation des fonctions U et V

b) En déduire les variations de f

Solution :1) $f(x)=x+1-2\sqrt{x+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\geq 0\}=[-1;+\infty[$

$f(0)=0+1-2\sqrt{0+1}=1-2=-1$ et $f(1)=1+1-2\sqrt{1+1}=2-2\sqrt{2}$

2) Soit $x\in[-1;+\infty[$: $1+f(x)=x+1-2\sqrt{x+1}+1=\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2\sqrt{x+1}+1^2=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$

b) Déduisons que f admet une valeur minimale absolue :

On a : $1+f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2\geq 0$ donc : $1+f(x)\geq 0\Rightarrow f(x)\geq -1$; $\forall x\in[-1;+\infty[$

Et comme : $f(0)=-1$ alors : $f(x)\geq f(0)$; $\forall x\in[-1;+\infty[$

Par suite : $f(0)=-1$ est la valeur minimale absolue de f en 0

3) Soient U et V deux fonctions définies par :

$U(x)=x^2-2x$ et $V(x)=\sqrt{x+1}$

a) →Le tableau de variation des fonctions U : $U(x)=x^2-2x$

U est une fonction polynôme donc $D_U=\mathbb{R}$: On a $a=1$; $b=-2$ et $c=0$ $\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times 1}=1$ et $\left(f(1)=-1\right)$

Donc la courbe (C_U) c'est une parabole de sommet $S(1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$U(x)$	↘	-1	↗

→Le tableau de variation des fonctions V : $V(x)=\sqrt{x+1}$

$D_V=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\geq 0\}=[-1;+\infty[$

PROF. ATMANI

x	-1		$+\infty$
$V(x)$	0	↗	

b) Déduisons les variations de f : On a : $1+f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$; $\forall x\in[-1;+\infty[$

Donc : $f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2-1=\left(V(x)-1\right)^2-1=U\left(V(x)\right)=(U\circ V)(x)$; $\forall x\in[-1;+\infty[$

Donc : $f=U\circ V$;sur $[-1;+\infty[$

$V(x)=1\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0$

- Puisque V est croissante sur $[-1;0]$ et $V([-1;0])\subset[0;1]$ et U est décroissante sur $[0;1]$ alors $f=U\circ V$ est décroissante sur $[-1;0]$
- Puisque V est croissante sur $[1;+\infty[$ et $V([1;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ et U est croissante sur $[1;+\infty[$ alors $f=U\circ V$ est croissante sur $[1;+\infty[$

→Le tableau de variation des fonctions $f=U\circ V$:

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	-1	↗	

Exercice 18 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=(-1)^{E(x)}\left(\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2$

1) Calculer : $f(3)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)$; $f(2024)$

2) Montrer que f est bornée

3) Montrer que $T=4$ est une période pour la fonction f

4) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I=[0;4[$

5) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;8]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=(-1)^{E(x)}\left(\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{x}{2}E\left(\frac{x}{4}\right)+2E\left(\frac{x}{4}\right)\right)$

Solution : 1) → $f(3)=(-1)^{E(3)}\left(\frac{3}{4}-E\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2=(-1)^3\left(\frac{3}{4}-0\right)^2$ car : $E(3)=3$ et $E\left(\frac{3}{4}\right)=0$

En effet : $0\le\frac{3}{4}<0+1$

$f(3)=(-1)^3\left(\frac{3}{4}-0\right)^2=-1\times\frac{9}{16}=-\frac{9}{16}$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

$\rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^{E\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}-E\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=(-1)^0\left(\frac{1}{2}-0\right)^2=1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ car : $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

En effet : $0\leq\frac{1}{2}<0+1$

$\rightarrow f(2024)=(-1)^{E(2024)}(2024-E(2024))^2=(-1)^{2024}(2024-2024)^2=1(0)^2=0$ car : $E(2024)=2024$

2) $f(x)=(-1)^{E(x)}\left(\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2$

$$|f(x)|=\left|(-1)^{E(x)}\left(\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2\right|=\left|\left(\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2\right|=\left(\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2$$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}\ E(x)\leq x\prec E(x)+1\Rightarrow\ E\left(\frac{x}{4}\right)\leq\frac{x}{4}\prec E\left(\frac{x}{4}\right)+1\Rightarrow 0\leq\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\prec 1\Rightarrow 0\leq\left(\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2\prec 1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ |f(x)|\leq 1$; c'est-à-dire : f est bornée

3) Montrons que $T=4$ est une période pour la fonction f

$D_f=\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+4\in\mathbb{R}$

- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a: $f(x+4)=(-1)^{E(x+4)}\left(\frac{x+4}{4}-E\left(\frac{x+4}{4}\right)\right)^2=(-1)^{E(x)}\times(-1)^4\left(\frac{x}{4}+1-E\left(\frac{x}{4}+1\right)\right)^2$

$=(-1)^{E(x)}\left(\frac{x}{4}+1-E\left(\frac{x}{4}\right)-1\right)^2=(-1)^{E(x)}\left(\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 4.

4) expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I=[0;4[$

$x\in[0;4[\Leftrightarrow 0\leq x\prec 4\Leftrightarrow 0\leq\frac{x}{4}\prec 1$ Donc : $E\left(\frac{x}{4}\right)=0$

Si $x\in[0;1[$ alors : $E(x)=0$ et $E\left(\frac{x}{4}\right)=0$

Donc : $f(x)=(-1)^{E(x)}\left(\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2=(-1)^0\left(\frac{x}{4}-0\right)^2=\frac{1}{16}x^2$

Si $x\in[1;2[$ alors : $E(x)=1$ et $E\left(\frac{x}{4}\right)=0$ donc : $f(x)=(-1)^{1}\left(\frac{x}{4}-0\right)^{2}=-\frac{1}{16}x^{2}$

Si $x\in[2;3[$ alors : $E(x)=2$ et $E\left(\frac{x}{4}\right)=0$ donc : $f(x)=(-1)^{2}\left(\frac{x}{4}-0\right)^{2}=\frac{1}{16}x^{2}$

Si $x\in[3;4[$ alors : $E(x)=3$ et $E\left(\frac{x}{4}\right)=0$ donc : $f(x)=(-1)^{3}\left(\frac{x}{4}-0\right)^{2}=-\frac{1}{16}x^{2}$

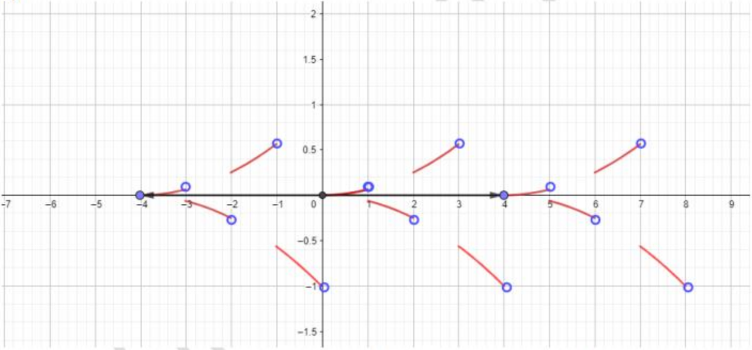
Donc : si $x\in[0;1[\cup[2;3[$: $f(x)=\frac{1}{16}x^{2}$ et si $x\in[1;2[\cup[3;4[$: $f(x)=-\frac{1}{16}x^{2}$

Le graphe de f est une parabole par morceaux.
Puisque :4 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur :

$D_E=D_f\cap[0;4[=\mathbb{R}\cap[0;4[=[0;4[$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $[-4;8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[0;4[$ et utiliser les translation $4\vec{i}$

5)



6) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=(-1)^{E(x)}\left(\left(\frac{x}{4}\right)^{2}-\frac{x}{2}E\left(\frac{x}{4}\right)+2E\left(\frac{x}{4}\right)\right)$

$$f(x)=(-1)^{E(x)}\left(\left(\frac{x}{4}\right)^{2}-\frac{x}{2}E\left(\frac{x}{4}\right)+2E\left(\frac{x}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{E(x)}\left(\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^{2}=(-1)^{E(x)}\left(\left(\frac{x}{4}\right)^{2}-\frac{x}{2}E\left(\frac{x}{4}\right)+2E\left(\frac{x}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{4}-E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^{2}=\left(\frac{x}{4}\right)^{2}-\frac{x}{2}E\left(\frac{x}{4}\right)+2E\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^{2}-\frac{x}{2}E\left(\frac{x}{4}\right)+\left(E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^{2}=\left(\frac{x}{4}\right)^{2}-\frac{x}{2}E\left(\frac{x}{4}\right)+2E\left(\frac{x}{4}\right)$$

$\Leftrightarrow \left(E\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2 = 2E\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow E\left(\frac{x}{4}\right)\left(E\left(\frac{x}{4}\right)-2\right)=0 \Leftrightarrow E\left(\frac{x}{4}\right)=0 \ ou \ E\left(\frac{x}{4}\right)-2=0$

$\Leftrightarrow 0 \le \frac{x}{4} \prec 1 \ ou \ E\left(\frac{x}{4}\right)=2 \Leftrightarrow 0 \le \frac{x}{4} \prec 1 \ ou \ 2 \le \frac{x}{4} \prec 3 \Leftrightarrow 0 \le x \prec 4 \ ou \ 8 \le x \prec 12$

$S = [0;4[\cup [8;12[$

Exercice19 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{xE(x)}{x+E(x)}$

1) a) Montrer que : $E(x) = -x \Leftrightarrow x = 0$

b) En déduire : D_f

2) a) Simplifier $f(x)$ si $x \in]0;1[$

b) Vérifier que : $f(x) = \frac{x}{1-x}$ si $x \in]-1;0[$

3) Montrer que : $\frac{x^2-x}{2x} \le f(x) \le \frac{x^2}{2x-1}$; $\forall x \in]1;+\infty[$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $xE(x) = x + E(x)$

Solution : $f(x) = \frac{xE(x)}{x+E(x)}$

1) a) Montrons que : $E(x) = -x \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow)$ Supposons que : $E(x) = -x$

Puisque $E(x) \in \mathbb{Z}$ alors : $-x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$E(x) = -x \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Leftarrow)$ Supposons que : $x = 0$

$E(0) = 0 = -0$

Finalement : $E(x) = -x \Leftrightarrow x = 0$

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + E(x) \neq 0\}$

On a : $x + E(x) = 0 \Leftrightarrow E(x) = -x \Leftrightarrow x = 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

2) a) Simplification de $f(x)$ si $x \in]0;1[$

Soit $x \in]0;1[$ donc : $E(x) = 0$ et donc : $f(x) = \frac{xE(x)}{x+E(x)} = \frac{x \times 0}{x+0} = 0$

Donc : $f(x) = 0$ si $x \in]0;1[$

b) Vérifions que : $f(x) = \frac{x}{1-x}$ si $x \in]-1;0[$

PROF: ATMANI NAJIB

Soit $x \in]-1;0[$ donc : $E(x)=-1$ et donc : $f(x)=\frac{xE(x)}{x+E(x)}=\frac{xE(x)}{x+E(x)}=\frac{x\times(-1)}{x+(-1)}=\frac{-x}{x-1}=\frac{x}{1-x}$

Donc : $f(x)=\frac{x}{1-x}$ si $x \in]-1;0[$

3) Montrons que : $\frac{x^2-x}{2x} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{2x-1}$; $\forall x \in]1;+\infty[$

Soit $x \in]1;+\infty[$: On a : $E(x) \leq x \prec E(x)+1$

Donc : $2x-1 \prec x+E(x) \leq 2x$

Donc : $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x+E(x)} \prec \frac{1}{2x-1}$

On a : $x-1 \prec E(x) \leq x$ Donc : $x^2-x \prec xE(x) \leq x^2$

Donc : $\frac{x^2-x}{2x} \leq \frac{xE(x)}{x+E(x)} \leq \frac{x^2}{2x-1}$

4) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $xE(x)=x+E(x)$

$xE(x)=x+E(x) \Leftrightarrow xE(x)-E(x)=x \Leftrightarrow (x-1)E(x)=x \quad : (E)$

Si : $x=1$ (E) devient : $0=1$ impossible donc : $x \neq 1$

$(E) \Leftrightarrow E(x)=\frac{x}{x-1} \Leftrightarrow E(x)=\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow E(x)=1+\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow E(x)-1=\frac{1}{x-1}$

Puisque : $E(x) \in \mathbb{Z}$ donc : $E(x)-1 \in \mathbb{Z}$ et donc : $\frac{1}{x-1} \in \mathbb{Z}$

Donc : $\exists k \in \mathbb{Z}^*$ tel que : $\frac{1}{x-1}=k$ et donc : $x-1=\frac{1}{k}$ c'est-à-dire : $x=\frac{1}{k}+1$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$

Inversement :

Si $k \succ 1$ alors $0 \prec \frac{1}{k} \prec 1 \Rightarrow 1 \prec \frac{1}{k}+1 \prec 2 \Rightarrow 1 \prec x \prec 2 \Rightarrow E(x)=1$

(E) Devient : $x-1=x \Leftrightarrow -1=0$ impossible

Si $k \leq -1$ alors $-1 \leq \frac{1}{k} \prec 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{k}+1 \prec 1 \Rightarrow 0 \leq x \prec 1 \Rightarrow E(x)=0$

(E) Devient : $0=x$ impossible car $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

Si $k=1$ alors : $\frac{1}{x-1}=k \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$

(E) Devient : $(2-1)E(2)=2 \Leftrightarrow E(2)=2$ vraie donc : $x=2$ solution

Conclusion : $S=\{2\}$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice20 : Considérons la fonction f_n définie par :

$$f_n(x)=\frac{E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})}{nx}$$ Avec : $n\in\mathbb{N}^*$

1) Déterminer : D_f

2) Simplifier : $f_1(x)$

3) a) Montrer que : $E(x)+E(x+\frac{1}{2})=E(2x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ (poser : $E(x)=n$ et discuter)

b) En déduire une simplification de : $f_2(x)$

4) Montrer que : $f_n(x)=\frac{E(nx)}{nx}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\forall x\in\mathbb{R}^*$

5) a) Montrer que : $1-\frac{1}{nx}\prec f_n(x)\leq 1$; $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$

c) Donner une valeur simple de $f_n(x)$ sur $\left]0;\frac{1}{n}\right[$; $\left]-\frac{1}{n};0\right[$; $\left]1;1+\frac{1}{n}\right[$ et sur $\left]1-\frac{1}{n};1\right[$

Solution : 1) $D_{f_n}=\{x\in\mathbb{R}/nx\neq 0\}=\mathbb{R}-\{0\}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) Simplification de : $f_1(x)$

On a : $f_1(x)=\frac{E(x)}{x}$

3) a) Montrons que : $E(x)+E(x+\frac{1}{2})=E(2x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ 0\leq x-E(x)\prec 1$

On pose : $x-E(x)=r$ donc : $0\leq r\prec 1$

$x-E(x)=r\Leftrightarrow x=E(x)+r$

$$E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)\Leftrightarrow E(E(x)+r)+E\left(E(x)+r+\frac{1}{2}\right)=E(2(E(x)+r))$$

$$\Leftrightarrow E(x)+E(r)+E(x)+E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2E(x)+2r)\Leftrightarrow 2E(x)+0+E\left(r+\frac{1}{2}\right)=2E(x)+E(2r)$$

Donc : $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)\Leftrightarrow E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$

Si je montre que : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$ Avec : $0\leq r\prec 1$ alors c'est fini

Si : $0\leq r\prec\frac{1}{2}$ alors : $0\leq 2r\prec 1$ et $\frac{1}{2}\leq r+\frac{1}{2}\prec 1$ donc : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=0$ et $E(2r)=0$

D'où : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$

Si : $\frac{1}{2}\leq r\prec 1$ alors : $1\leq 2r\prec 2$ et $\frac{3}{2}\leq r+\frac{1}{2}\prec 2$ donc : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=1$ et $E(2r)=1$

PROF: ATMANI NAJIB

D'où : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$

Par suite : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$ Avec : $0\leq r\prec 1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)$

b) Déduction d'une simplification de : $f_2(x)$

$$f_2(x)=\frac{E(x)+E(x+\frac{1}{2})}{2x}=\frac{E(2x)}{2x}$$

4) Montrons que : $f_n(x)=\frac{E(nx)}{nx}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\forall x\in\mathbb{R}^*$

C'est-à-dire Montrons que : $\frac{E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})}{nx}=\frac{E(nx)}{nx}$

C'est-à-dire Montrons que : $E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})=E(nx)$???

On pose : $E(x)=m\in\mathbb{Z}$ et donc : $m\leq x\prec m+1$

Donc : $m+\frac{k}{n}\leq x+\frac{k}{n}\prec m+1+\frac{k}{n}$; $\forall k\in\{0;1;....;n-1\}$

Donc : $m\leq m+\frac{k}{n}\leq x+\frac{k}{n}\prec m+1+\frac{k}{n}\prec m+2$ (on ne peut pas déterminer : $E(x+\frac{k}{n})$

On a : $x+\frac{k_0}{n}\prec m+1\leq x+\frac{k_0+1}{n}$ par suite : $\forall k\in\{0;1;....;k_0\}$ on a : $m\leq m+\frac{k}{n}\leq x+\frac{k_0}{n}\prec m+1$

Donc : $E(x+\frac{k}{n})=m$ $\forall k\in\{0;1;....;k_0\}$ ①

Et $\forall k\in\{k_0+1;....;n-1\}$; $m+1\leq x+\frac{k_0+1}{n}\prec x+\frac{k}{n}\prec m+2$

Donc : $E(x+\frac{k}{n})=m+1$; $\forall k\in\{k_0+1;....;n-1\}$ ②

De : ① et ② en déduit que : $E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})=m(k_0+1)+(m+1)(n-k_0-1)$

(Car : de p à q il Ya : q-p+1 éléments)

Donc : $E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})=mn+n-k_0-1$

Et puisque : $x+\frac{k_0}{n}\prec m+1\leq x+\frac{k_0+1}{n}$ alors : $m+1-\frac{k_0+1}{n}\leq x\prec m+1-\frac{k_0}{n}$

Donc : $mn+n-k_0-1\leq mn\prec mn+n-k_0$

Donc : $E(nx)=E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})$

PROF: ATMANI NAJIB

5) a) Montrons que : $1-\frac{1}{nx} \prec f_n(x) \leq 1$; $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$

On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x \Rightarrow nx-1 \prec E(nx) \leq nx \Rightarrow \frac{nx-1}{nx} \prec \frac{E(nx)}{nx} \leq \frac{nx}{nx} \Rightarrow 1-\frac{1}{nx} \prec f_n(x) \leq 1$

b) $\rightarrow \forall x \in \left]0;\frac{1}{n}\right[$ on a : $0 \prec x \prec \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \prec nx \prec 1 \Rightarrow E(nx)=0$

Donc : $f_n(x)=\frac{E(nx)}{nx}=\frac{0}{nx}=0$

$\rightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{n};0\right[$ on a : $-\frac{1}{n} \prec x \prec 0 \Rightarrow -1 \prec nx \prec 0 \Rightarrow E(nx)=-1$

Donc : $f_n(x)=\frac{E(nx)}{nx}=\frac{-1}{nx}$

$\rightarrow \forall x \in \left]1;1+\frac{1}{n}\right[$ On a : $1 \prec x \prec 1+\frac{1}{n} \Rightarrow n \prec nx \prec n+1 \Rightarrow E(nx)=n$

Donc : $f_n(x)=\frac{E(nx)}{nx}=\frac{n}{nx}=\frac{1}{x}$

$\rightarrow \forall x \in \left]1-\frac{1}{n};1\right[$ On a : $1-\frac{1}{n} \prec x \prec 1 \Rightarrow n-1 \prec nx \prec n \Rightarrow E(nx)=n-1$

Donc : $f_n(x)=\frac{E(nx)}{nx}=\frac{n-1}{nx}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB